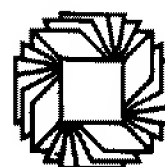


**GELSON I**

2ª edição

FUNDAMENTOS  
**MAT**  
**ELEM**  
TRIGONOMETRIA

121 exercícios res  
298 exercícios pro  
215 testes de vest



AT  
ED

### Capa

Roberto Franklin Rondino  
Sylvio Ulhoa Cintra Filho  
Rua Inhambu, 1235 - S. Paulo

### Composição e desenhos

AM Produções Gráficas Ltda.  
Rua Castro Alves, 135 - S. Paulo

### Artas

Atual Editora Ltda.

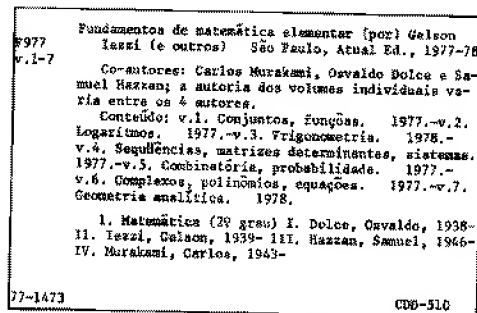
### Fotolitos

H.O.P. Fotolitos Ltda.  
Rua Delmira Ferreira, 32S - S. Paulo

### Impressão e acabamento

Companhia Melhoramentos de São Paulo  
Rua Tito, 479 - S. Paulo

CIP-Brasil. Catalogação-na-Fonte  
Câmara Brasileira do Livro, SP



Índice para catálogo sistemático:  
1. Matemática 510

Todos os direitos reservados a  
**ATUAL EDITORA LTDA**  
Rua José Antônio Coelho, 786  
Telefones: 71-7795 e 549-1720  
CEP 04011 - São Paulo - SP - Brasil

# APRESENTAÇÃO

"Fundamentos de Matemática Elementar" é uma coleção em dez volumes elaborada com a pretensão de dar ao estudante uma visão global da Matemática, ao nível da escola de 2º grau. Desenvolvendo os programas em geral adotados para o curso colégio, os "Fundamentos" visam aos alunos em preparativos para exames vestibulares, aos universitários que necessitam rever a Matemática Elementar e também, como é óbvio, àqueles alunos de colégio mais interessados na "rainha das ciências".

No desenvolvimanto dos inúmeros capítulos dos livros de "Fundamentos" procuramos seguir uma ordem lógica na apresentação de conceitos e propriedades. Salvo algumas exceções bem conhecidas da Matemática Elementar, as proposições e teoremas estão sempre acompanhados das respectivas demonstrações.

Na estruturação das séries de exercícios, buscamos sempre uma ordenação crescente da dificuldade. Partimos de problemas simples e tentamos chegar a questões que envolvem outros assuntos já vistos, obrigando o estudante a uma revisão. A sequência do texto sugere uma dosagem para teoria e exercícios. Os exercícios resolvidos, apresentados em meio aos propostos, pretendem sempre dar explicação sobre alguma novidade que aparece. No final do volume o aluno pode encontrar a resposta para cada problema proposto e assim ter seu reforço positivo ou partir à procura do erro cometido.

A última parte de cada volume é constituída por testes de vestibulares até 1.977 selecionados e resolvidos o que pode ser usado para uma revisão da matéria estudada.

Queramos consignar aqui nossos agradecimentos sinceros ao Prof. Dr. Fernando Furquim de Almeida cujo apoio foi imprescindível para que pudéssemos homenagear nesta coleção alguns dos grandes matemáticos, relatando fatos notáveis de suas vidas e suas obras.

Finalmente, como há sempre uma enorme distância entre o anseio dos autores e o valor de sua obra, gostaríamos de receber dos colegas professores uma apreciação sobre este trabalho, notadamente os comentários críticos, os quais agradecemos.

Os autores

# ÍNDICE

## CAPÍTULO I – ARCOS E ÂNGULOS

I. Arcos de circunferência . . . . .	1-C
II. Medidas de arcos . . . . .	1-C
III. Ângulos de duas semi-retas . . . . .	5-C
IV. Medida de ângulos . . . . .	6-C
V. Ciclo trigonométrico . . . . .	9-C

## CAPÍTULO II – FUNÇÕES CIRCULARES

I. Noções gerais . . . . .	15-C
II. Funções periódicas . . . . .	16-C
III. Função seno . . . . .	17-C
IV. Função cosseno . . . . .	26-C
V. Função tangente . . . . .	29-C
VI. Função cotangente . . . . .	33-C
VII. Função secante . . . . .	34-C
VIII. Função cossecante . . . . .	36-C

## CAPÍTULO III – RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

I. Introdução . . . . .	39-C
II. Relações fundamentais . . . . .	39-C
III. Identidades . . . . .	49-C
IV. Demonstração de identidade . . . . .	50-C

## CAPÍTULO IV – REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

I. Redução do 2º ao 1º quadrante . . . . .	53-C
II. Redução do 3º ao 1º quadrante . . . . .	54-C
III. Redução do 4º ao 1º quadrante . . . . .	55-C
IV. Redução de $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ a $[0, \frac{\pi}{4}]$ . . . . .	56-C
V. Identidades . . . . .	58-C
VI. Funções pares e funções ímpares . . . . .	60-C

## CAPÍTULO V – ARCOS NOTÁVEIS

I. Teorema . . . . .	63-C
II. Aplicações . . . . .	64-C

## CAPÍTULO VI – TRANSFORMAÇÕES

I. Fórmulas de adição . . . . .	67-C
II. Fórmulas de multiplicação . . . . .	75-C
III. Fórmulas de divisão . . . . .	79-C
IV. Tangente do arco metade . . . . .	82-C
V. Transformação em produto . . . . .	83-C

## CAPÍTULO VII – EQUAÇÕES

I. Equações fundamentais . . . . .	93-C
II. Resolução da equação $\sin \alpha = \sin \beta$ . . . . .	94-C
III. Resolução da equação $\cos \alpha = \cos \beta$ . . . . .	98-C
IV. Resolução da equação $\tan \alpha = \tan \beta$ . . . . .	101-C
V. Soluções de uma equação dentro de certo intervalo . . . . .	104-C
VI. Equações clássicas . . . . .	107-C
VII. Funções circulares inversas . . . . .	115-C

## CAPÍTULO VIII – INEQUAÇÕES

I. Inequações fundamentais . . . . .	127-C
II. Resolução de $\sin x > m$ . . . . .	128-C
III. Resolução de $\sin x < m$ . . . . .	129-C

IV. Resolução de $\cos x > m$ . . . . .	132-C
V. Resolução de $\cos x < m$ . . . . .	132-C
VI. Resolução de $\tan x > m$ . . . . .	138-C
VII. Resolução de $\tan x < m$ . . . . .	138-C

## CAPÍTULO IX – TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

I. Elementos principais . . . . .	141-C
II. Propriedades geométricas . . . . .	142-C
III. Propriedades trigonométricas . . . . .	146-C
IV. Resolução de triângulos retângulos . . . . .	150-C

## CAPÍTULO X – TRIÂNGULOS QUALQUER

I. Propriedades trigonométricas . . . . .	155-C
II. Propriedades geométricas . . . . .	166-C
III. Resolução de triângulos quaisquer . . . . .	171-C

RESPOSTAS OE EXERCÍCIOS . . . . .	175-C
-----------------------------------	-------

TESTES . . . . .	185-C
------------------	-------

RESPOSTAS DOS TESTES . . . . .	221-C
--------------------------------	-------



Augustin-Louis Cauchy  
(1789 - 1857)



## Engenheiro de Napoleão era monarquista

Augustin-Louis Cauchy nasceu em Paris, logo após a queda da Bastilha. Coursou a Escola Politécnica, onde mais tarde foi professor, pois gostava muito de ensinar, e aceitou a cadeira de Monge na Academia, quando este foi demitido. Ainda como estudante contou com o apoio de Laplace e Lagrange que se interessaram por seu trabalho.

Cauchy chegou a ser um dos engenheiros militares de Napoleão. Católico devoto e reacionário convicto, defendia vigorosamente a Ordem dos Jesuitas e quando Carlos X, seu rei, foi exilado, também deixou Paris, recebendo mais tarde o título de barão como recompensa por sua fidelidade.

Produziu grande quantidade de livros e memórias, a maioria dedicada à Matemática Pura e sempre dando ênfase às demonstrações rigorosas.

Uma de suas características marcantes era que, obtendo um novo resultado, logo tratava de publicá-lo, ao contrário do que fazia Gauss. Assim, contribuiu amplamente com suas memórias para o "Journal" da Escola Politécnica e para os "Comptes Rendus" (Notícias) da Academia, onde se aplicou, a partir de 1814, em teoria das funções de variáveis complexas, da qual é um dos criadores.

Data de 1812 seu primeiro trabalho sobre determinantes, com 84 páginas, passando a aplicá-los nas mais diversas situações como, por exemplo, na propagação de ondas.

Entre 1821 e 1829, publicou três obras que deram ao Cálculo elementar o caráter que tem hoje, definindo precisamente limite, derivada e integral; os conceitos de funções e de limites de funções eram fundamentais. Estas obras de Cauchy foram desenvolvidas quase ao mesmo tempo e com idéias semelhantes por Bolzano, um padre tcheco.

Cauchy está ligado a muitos teoremas sobre séries infinitas, essenciais à teoria das funções, e em Geometria conseguiu generalizar a fórmula poliadral de Descartes-Euler.

Em Teoria dos Números, provou o teorema de Fermat, um dos mais difíceis e produto de pesquisas iniciadas pelos pitagóricos cerca de 2300 anos antes.

Juntamente com Navier, Cauchy foi fundador da teoria matemática da Elasticidade e também auxiliou o desenvolvimento da Mecânica celeste.

Cauchy, tanto quanto seu contemporâneo Gauss, contribuiu para quase todas as partes da Matemática e sua grande quantidade de obras publicadas só é superada por Euler.

## CAPÍTULO I

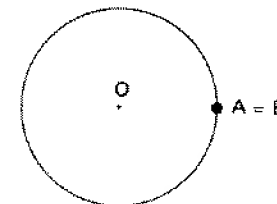
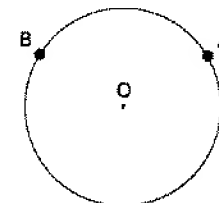
# ARCOS E ÂNGULOS

## I. ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA

### 1. Definição

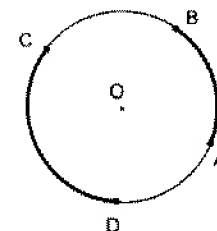
Dados dois pontos distintos A e B sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes. Cada uma dessas partes, que incluem A e B, é denominada *arco de circunferência*  $\widehat{AB}$ .

Em particular, se os pontos A e B coincidem, eles determinam dois arcos: um deles é um ponto (denominado *arco nulo*) e o outro é a circunferência (denominado *arco de uma volta*).

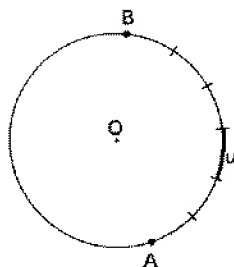


## II. MEDIDAS DE ARCOS

2. Se queremos comparar os "tamanhos" de dois arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{CD}$  somos naturalmente levados a estabelecer um método que permita saber qual deles é o maior ou se são iguais. Este problema é resolvido estabelecendo-se um método para medir arcos.



3. Medida de um arco  $\widehat{AB}$  em relação a um arco unitário  $u$  ( $u$  não nulo e de mesmo raio que  $\widehat{AB}$ ) é o número real que exprime quantas vezes o arco  $u$  "cabe" no arco  $\widehat{AB}$ . Assim, na figura ao lado, o arco  $u$  cabe 6 vezes no arco  $\widehat{AB}$ , então a medida do arco  $\widehat{AB}$  é 6, isto é, arco  $\widehat{AB} = 6 \cdot \text{arco } u$ .



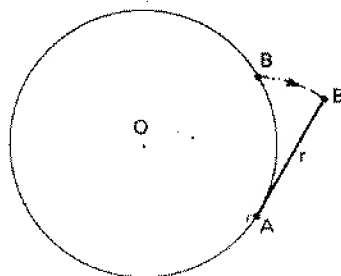
#### 4. Unidades

Para evitar as confusões que ocorreriam se cada um escolhesse uma unidade  $u$  para medir o mesmo arco  $\widehat{AB}$ , limitamos as unidades de arcos a apenas duas: o *grau* e o *radiano*.

Grau (símbolo  $^\circ$ ) é um arco unitário igual a  $\frac{1}{360}$  da circunferência que contém o arco a ser medido.

Radiano (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido.

Assim, ao afirmar que um arco  $\widehat{AB}$  mede 1 rad estamos dizendo que "esticando" o arco  $\widehat{AB}$  obtemos um segmento de reta  $AB$  cuja medida é exatamente o raio da circunferência.

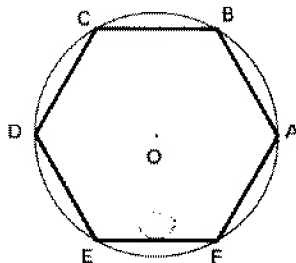


5. É evidente que uma circunferência mede  $360^\circ$ , porém, já não é tão fácil dizer quantos radianos mede uma circunferência.

Podemos chegar a uma noção intuitiva do valor dessa medida, considerando a seguinte construção:

I) Em uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  inscrevemos um hexágono regular  $ABCDEF$ . Cada lado do hexágono tem comprimento  $r$ :

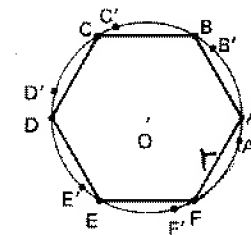
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} = r$$



II) A circunferência fica dividida em 6 arcos de medidas iguais

$$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EF} = \widehat{FA}$$

e, sendo o comprimento do arco sempre maior que o comprimento da corda correspondente, todos esses arcos são maiores que 1 rad.



III) Em cada um dos citados arcos "cabe" 1 rad:

$$\widehat{AB'} = \widehat{BC'} = \widehat{CD'} = \widehat{DE'} = \widehat{EF'} = \widehat{FA'} = 1 \text{ rad}$$

e ainda sobra uma fração de rad.

IV) O radiano "cabe" 6 vezes na circunferência e mais a soma dessas "sobras". Mais precisamente demonstra-se que a circunferência mede  $6,283584\dots$  rad (número batizado com o nome de  $2\pi$ ).

Tendo em vista estas considerações, podemos estabelecer a seguinte correspondência para conversão de unidades:

$$\begin{aligned} 360^\circ &\longleftrightarrow 2\pi \text{ rad} \\ 180^\circ &\longleftrightarrow \pi \text{ rad} \end{aligned}$$

#### EXERCÍCIOS

C.1 Expressar  $225^\circ$  em radianos.

**Solução**

Estabelecemos a seguinte regra de três simples:

$$\begin{aligned} 180^\circ &\longleftrightarrow \pi \text{ rad} \\ 225^\circ &\longleftrightarrow x \end{aligned} \quad \text{logo } x = \frac{225 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

C.2 Expressar em radianos:

- |                |                |
|----------------|----------------|
| a) $210^\circ$ | b) $240^\circ$ |
| c) $270^\circ$ | d) $300^\circ$ |
| e) $315^\circ$ | f) $330^\circ$ |

C.3 Expressar  $\frac{11\pi}{6}$  rad em graus.

**Solução**

Temos:

$$\begin{aligned} \pi \text{ rad} &\longleftrightarrow 180^\circ \\ \frac{11\pi}{6} \text{ rad} &\longleftrightarrow x \end{aligned} \quad \text{logo } x = \frac{\frac{11\pi}{6} \cdot 180}{\pi} = 330^\circ$$

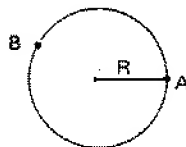
C.4 Exprimir em graus:

- a)  $\frac{\pi}{6}$  rad      b)  $\frac{\pi}{4}$  rad      c)  $\frac{\pi}{3}$  rad  
d)  $\frac{2\pi}{3}$  rad      e)  $\frac{3\pi}{4}$  rad      f)  $\frac{5\pi}{6}$  rad

C.5 Um arco de circunferência mede 30 cm e o raio da circunferência mede 10 cm. Calcular a medida do arco em radianos.

**Solução**

$$[\text{medida de } \widehat{AB} \text{ em rad}] = \frac{\text{comprimento do arco } \widehat{AB}}{\text{comprimento do raio}} = \frac{30 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 3 \text{ rad}$$

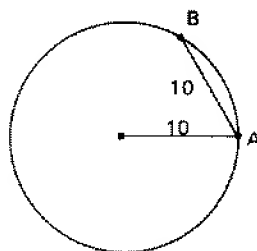


C.6 Sobre uma circunferência de raio 10 cm marca-se um arco AB tal que a corda AB mede 10 cm. Calcular a medida do arco em radianos.

**Solução**

O segmento AB é lado do hexágono regular inscrito na circunferência, logo, o menor arco AB é  $\frac{1}{6}$  da circunferência, isto é, mede:

$$\frac{1}{6} \times 2\pi \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$



C.7 Um grau se divide em 60' (60 minutos) e um minuto se divide em 60'' (60 segundos). Por exemplo, um arco de medida 30' é um arco de 0,5°. Pedese converter a radianos os seguintes arcos:

- a) 22°30'      b) 31°15'45''

**Solução**

$$\begin{aligned} \text{a) } 22^\circ 30' &= 22 \times 60' + 30' = 1350' \\ 180^\circ &= 180 \times 60' = 10800' \end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned} 10800' &\longleftrightarrow \pi \text{ rad} \\ 1350' &\longleftrightarrow x \end{aligned} \quad \text{logo } x = \frac{1350 \cdot \pi}{10800} = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 31^\circ 15' 45'' &= 31 \times 3600'' + 15 \times 60'' + 45'' = 112\,545'' \\ 180^\circ &= 180 \times 3600'' = 648\,000'' \end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned} 648\,000'' &\longleftrightarrow \pi \text{ rad} \\ 112\,545'' &\longleftrightarrow x \end{aligned} \quad \text{logo } x = \frac{112\,545 \cdot \pi}{648\,000} = \frac{112\,545 \cdot 3,1416}{648\,000} = 0,54563 \text{ rad}$$

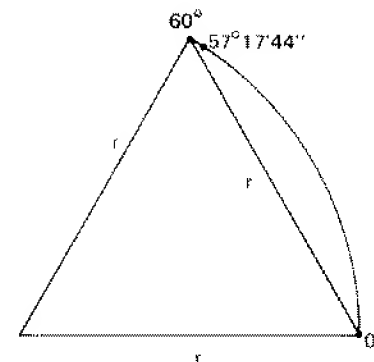
C.8 Converter a graus o arco 1 rad.

**Solução**

$$\begin{aligned} 3,1416 \text{ rad} &\longleftrightarrow 180^\circ \\ 1 \text{ rad} &\longleftrightarrow x \end{aligned}$$

$$\text{logo } x = \frac{180^\circ}{3,1416}$$

$$\begin{array}{r} 1\,800\,000 \quad 31\,416 \\ 229\,200 \quad 57^\circ 17' 44'' \\ 09\,288 \\ \times 60 \\ 557\,280 \\ 243\,120 \\ 23\,208 \\ \times 60 \\ 1\,392\,480 \\ 135\,840 \\ 10\,176 \end{array}$$



C.9 Exprimir em radianos as medidas dos arcos a e b tais que  $a - b = 15^\circ$  e  $a + b = \frac{7\pi}{4}$  rad.

C.10 Exprimir em graus as medidas dos arcos a, b e c tais que  $a + b + c = 13^\circ$ ,  $a + b + 2c = \frac{\pi}{12}$  rad e  $a + 2b + c = \frac{\pi}{9}$  rad.

### III. ÂNGULOS DE DUAS SEMI-RETAS

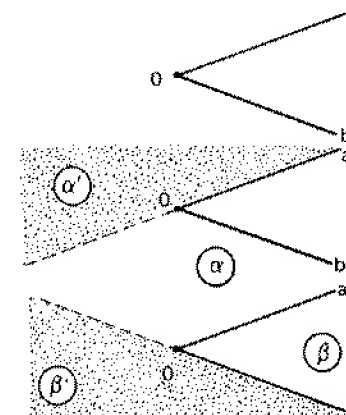
6. Consideremos duas semi-retas Oa e Ob de mesma origem, distintas e não opostas.

A reta a divide o plano ab em dois semi-planos opostos.

$$\alpha \mid \alpha \supset Oa \quad \text{e} \quad \alpha' \mid \alpha' \not\supset Oa$$

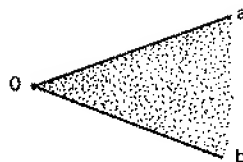
A reta b divide o plano ab em dois semi-planos opostos.

$$\beta \mid \beta \supset Ob \quad \text{e} \quad \beta' \mid \beta' \not\supset Ob$$



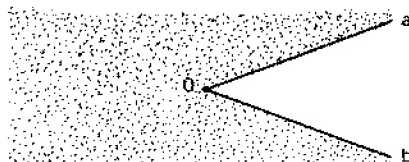
Ângulo convexo  $\widehat{aOb}$  é a intersecção dos semi-planos  $\alpha$  e  $\beta$ .

$$\widehat{aOb} = \alpha \cap \beta \quad (\text{convexo})$$



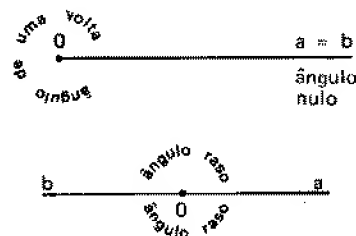
Ângulo côncavo  $\widehat{aOb}$  é a reunião dos semi-planos  $\alpha'$  e  $\beta'$ .

$$\widehat{aOb} = \alpha' \cup \beta' \quad (\text{côncavo})$$



7. Em particular, se as semi-retas Oa e Ob coincidem dizemos que elas determinam dois ângulos: um *ângulo nulo* e um *ângulo de uma volta*.

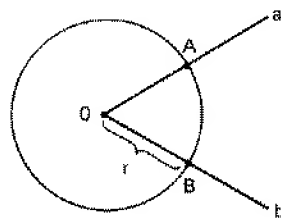
No caso particular das semi-retas Oa e Ob serem opostas dizemos que determinam dois *ângulos rasos*.



#### IV. MEDIDA DE ÂNGULOS

8. Dado um ângulo  $\widehat{aOb}$ , consideremos uma circunferência de centro O e raio r. Sejam A e B os pontos onde os lados do ângulo  $\widehat{aOb}$  interceptam a circunferência.

A cada arco  $\widehat{AB}$  corresponde desta maneira um único ângulo central  $\widehat{aOb}$  e vice-versa. Convencionando que a um arco unitário corresponde um ângulo central unitário, decorre que o arco  $\widehat{AB}$  e o ângulo central  $\widehat{aOb}$  correspondente passam a ter a mesma medida.



Assim, por exemplo, temos:

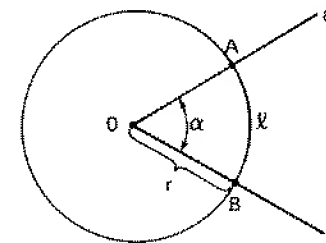
1º) *ângulo de 1°* é um ângulo central correspondente a um arco de 1°, isto é, é um ângulo central que determina na circunferência um arco igual a  $\frac{1}{360}$  desta;

2º) *ângulo de 1 rad* é um ângulo central correspondente a um arco de 1 rad, isto é, é um ângulo central que determina na circunferência um arco cujo comprimento é igual ao do raio;

3º) *ângulo de 60°* é um ângulo central correspondente a um arco de 60°;

4º) *ângulo de  $\pi$  rad* é um ângulo central correspondente a um arco de  $\pi$  rad.

9. Quando queremos medir em radianos um ângulo  $\widehat{aOb}$ , devemos construir uma circunferência de centro O e raio r e verificar quantos radianos mede o arco  $\widehat{AB}$ , isto é, calcular o quociente entre o comprimento  $\ell$  do arco  $\widehat{AB}$  pelo raio r da circunferência:

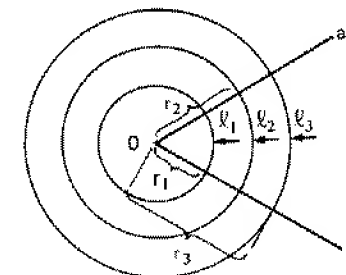


$$\alpha = \frac{\ell}{r} \quad (\alpha \text{ em radianos})$$

Por exemplo, se o ângulo central  $\widehat{aOb}$  é tal que determina numa circunferência de raio  $r = 5$  cm um arco  $\widehat{AB}$  de medida  $\ell = 8$  cm, então a medida de  $\widehat{aOb}$  é:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{8}{5} = 1,6 \text{ rad}$$

Observemos que, fixado um ângulo central  $\widehat{aOb}$  de medida  $\alpha$  rad e construídas as circunferências de centro O e raios  $r_1, r_2, r_3, \dots$ , os arcos correspondentes a  $\widehat{aOb}$  têm comprimentos  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$  tais que:



$$\frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\ell_2}{r_2} = \frac{\ell_3}{r_3} = \dots = \alpha$$

## EXERCÍCIOS

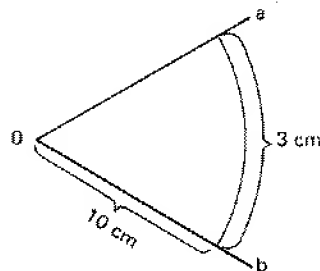
- C.11 Calcular, em graus, a medida do ângulo  $\widehat{aOb}$  da figura.

**Solução**

$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{3}{10} \text{ rad. Convertendo a graus:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi \text{ rad} \rightarrow 180^\circ \\ \frac{3}{10} \text{ rad} \rightarrow x \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{3}{10} \times 180^\circ}{\pi} = \frac{54}{3,1416} = 17^\circ 11' 19''.$$



- C.12 Calcular o comprimento  $\ell$  do arco  $\widehat{AB}$  definido numa circunferência de raio  $r = 10$  cm, por um ângulo central de  $60^\circ$ .

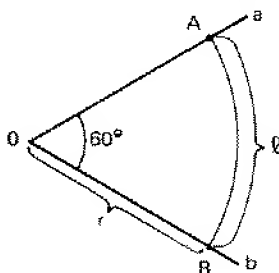
**Solução**

Convertido a radianos, o ângulo central  $\widehat{aOb}$  tem medida  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  rad, então:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \ell = \alpha \cdot r = \frac{\pi}{3} \cdot 10$$

portanto:

$$\ell = \frac{31,416}{3} = 10,472 \text{ cm.}$$



- C.13 Calcular a medida do ângulo central  $\widehat{aOb}$  que determina em uma circunferência de raio  $r$  um arco de comprimento  $\frac{2\pi r}{3}$ .

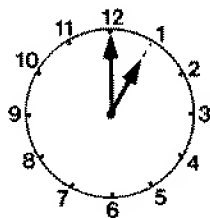
- C.14 Calcular o comprimento  $\ell$  do arco  $\widehat{AB}$  definido em uma circunferência de raio 7 cm por um ângulo central de 4,5 rad.

- C.15 Calcular o menor dos ângulos formados pelos ponteiros de um relógio que está assinalando:

- a) 1 h;                      b) 1 h 15 min;                      c) 1 h 40 min.

**Solução**

- a) Notemos que os números do mostrador de um relógio estão colocados em pontos que dividem a circunferência em 12 partes iguais, cada uma das quais mede  $30^\circ$ . Assim, à 1 h os ponteiros do relógio formam um ângulo convexo de  $30^\circ$ .



- b) Sabemos que em 60 minutos o ponteiro pequeno percorre um ângulo de  $30^\circ$ , então em 15 minutos ele percorre um ângulo  $\alpha$  tal que:

$$\frac{\alpha}{15} = \frac{30^\circ}{60}$$

portanto  $\alpha = 7,5^\circ = 7^\circ 30'$ .

Assim, temos:

$$\theta = 60^\circ - \alpha = 60^\circ - 7^\circ 30' = 52^\circ 30'.$$

- c) Notemos que em 40 minutos o ponteiro pequeno percorre o ângulo  $\beta$  tal que:

$$\frac{\beta}{40} = \frac{30^\circ}{60}$$

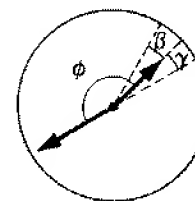
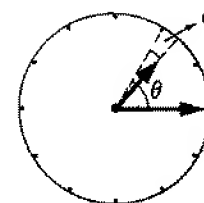
portanto  $\beta = 20^\circ$ .

Assim, temos:

$$\phi = 150^\circ + \beta = 150^\circ + 20^\circ = 170^\circ$$

ou ainda

$$\phi = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 10^\circ = 170^\circ.$$



- C.16 Calcular o menor dos ângulos formados pelos ponteiros de um relógio que marca:

- a) 2 h 40 min;                      b) 5 h 55 min;                      c) 6 h 30 min.

## V. CICLO TRIGONOMÉTRICO

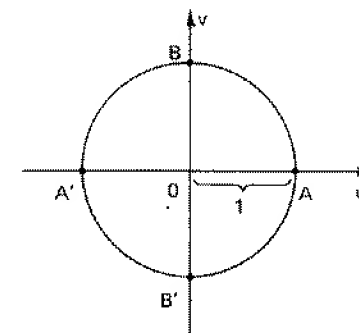
### 10. Definição

Tomemos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal  $uOv$ . Consideremos a circunferência  $\lambda$  de centro  $O$  e raio  $r = 1$ . Notemos que o comprimento desta circunferência é  $2\pi$  pois  $r = 1$ .

Vamos agora definir uma aplicação de  $\mathbb{R}$  sobre  $\lambda$ , isto é, vamos associar a cada número real  $x$  um único ponto  $P$  da circunferência  $\lambda$  do seguinte modo:

1º) se  $x = 0$ , então  $P$  coincide com  $A$ ;

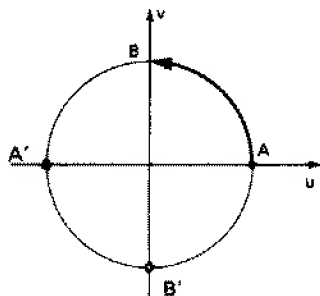
2º) se  $x > 0$ , então realizamos a partir de  $A$  um percurso de comprimento  $x$ , no sentido anti-horário, e marcamos  $P$  como ponto final do percurso.



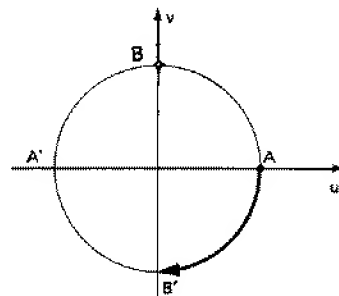
3º) se  $x < 0$ , então realizamos a partir de A um percurso de comprimento  $|x|$ , no sentido horário. O ponto final do percurso é P.

A circunferência  $\lambda$  acima definida, com origem em A, é chamada ciclo ou circunferência trigonométrica.

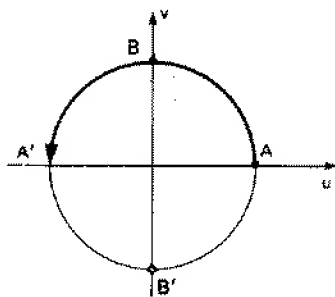
Se o ponto P está associado ao número  $x$  dizemos que P é a imagem de  $x$  no ciclo. Assim, por exemplo, temos:



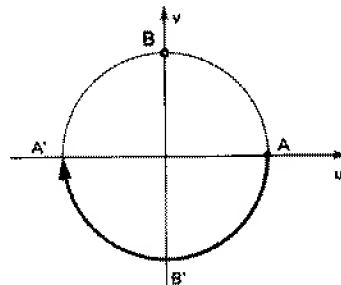
a imagem de  $\frac{\pi}{2}$  é B



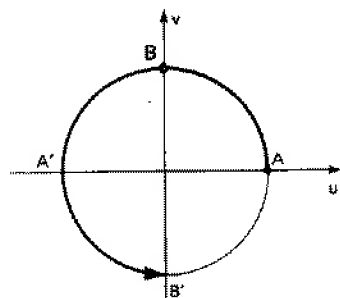
a imagem de  $-\frac{\pi}{2}$  é B'



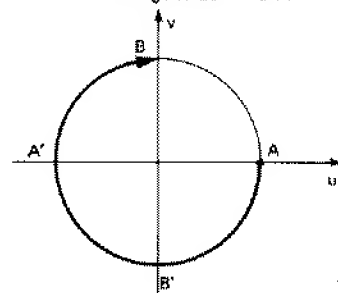
a imagem de  $\pi$  é A'



a imagem de  $-\pi$  é A'



a imagem de  $\frac{3\pi}{2}$  é B'



a imagem de  $-\frac{3\pi}{2}$  é B

11. Notemos que se P é a imagem do número  $x_0$ , então P também é a imagem dos números:

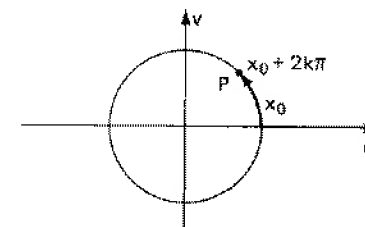
$$x_0, x_0 + 2\pi, x_0 + 4\pi, x_0 + 6\pi, \text{ etc.}$$

é também de

$$x_0 - 2\pi, x_0 - 4\pi, x_0 - 6\pi, \text{ etc.}$$

Em resumo, P é a imagem dos elementos do conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$



Dois números reais  $x_1 = x_0 + 2k_1\pi$  ( $k_1 \in \mathbb{Z}$ ) e  $x_2 = x_0 + 2k_2\pi$  ( $k_2 \in \mathbb{Z}$ ) que tem a mesma imagem P no ciclo são tais que  $x_1 - x_2 = 2k\pi$  (onde  $k = k_1 - k_2$ ) e, por isso, diz-se que  $x_1$  e  $x_2$  são *côngruos módulo  $2\pi$*  ou simplesmente,  $x_1$  e  $x_2$  são *côngruos*.

## EXERCÍCIOS

C.17 Divide-se o ciclo em 12 partes iguais, utilizando-se A como um dos pontos divisores. Determinar os  $x$  ( $x \in [0, 2\pi[$ ) cujas imagens são os pontos divisores.

Solução

Notando que cada parte mede  $\frac{1}{12} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$  e que P é a imagem de  $x$  quando  $\widehat{AP} = x$ , podemos construir a tabela abaixo:

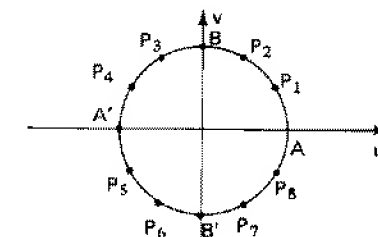


imagem de $x$	A	$P_1$	$P_2$	B	$P_3$	$P_4$	A'	$P_5$	$P_6$	B'	$P_7$	$P_8$
$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$

C.18 Divide-se o ciclo em 8 partes iguais, utilizando-se A como um dos pontos divisores. Determinar o conjunto dos  $x$  ( $x \in [0, 2\pi[$ ) cujas imagens são os pontos divisores.

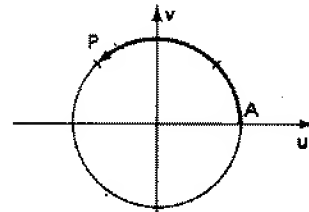
C.19 Indicar no ciclo a imagem de cada um dos seguintes números:

- a)  $\frac{3\pi}{4}$       b)  $-\frac{5\pi}{4}$       c)  $11\pi$   
d)  $-3\pi$       e)  $\frac{25\pi}{3}$       f)  $-\frac{19\pi}{6}$

**Solução**

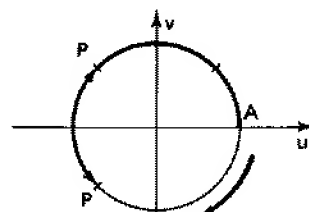
a)  $\frac{3\pi}{4} = \frac{3}{8} \cdot 2\pi$

Marcamos, a partir de A, um percurso  $\widehat{AP}$  igual a  $\frac{3}{8}$  do ciclo, no sentido anti-horário.



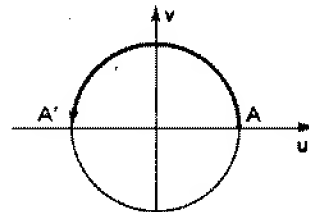
b)  $-\frac{5\pi}{4} = -\frac{5}{8} \cdot 2\pi$

Marcamos, a partir de A, um percurso  $\widehat{AP}$  igual a  $\frac{5}{8}$  do ciclo, no sentido horário.



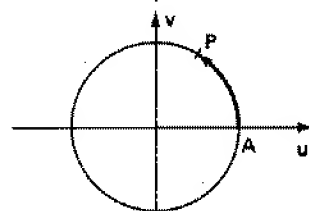
c)  $11\pi = \pi + 10\pi$

Como  $11\pi - \pi$  é múltiplo de  $2\pi$ , então  $11\pi$  e  $\pi$  têm a mesma imagem (A').



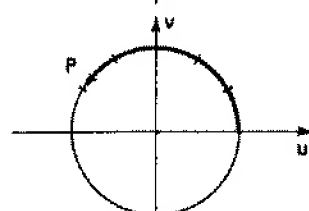
d)  $-3\pi = \pi - 4\pi$

Como  $(-3\pi) - \pi$  é múltiplo de  $2\pi$ , então  $-3\pi$  e  $\pi$  têm a mesma imagem (A').



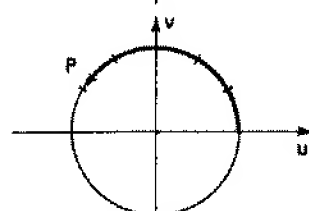
e)  $\frac{25\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{24\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 8\pi$

Assim,  $\frac{25\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{3}$  têm a mesma imagem P que é obtida marcando um percurso  $\widehat{AP}$  igual a  $\frac{1}{6}$  do ciclo, no sentido anti-horário.



f)  $-\frac{19\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - \frac{24\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - 4\pi$

Assim,  $-\frac{19\pi}{6}$  e  $\frac{5\pi}{6}$  têm a mesma imagem. Como  $\frac{5\pi}{6} = \frac{5}{12} \cdot 2\pi$ , a imagem procurada é a extremidade do percurso  $\widehat{AP}$  igual a  $\frac{5}{12}$  do ciclo medido no sentido anti-horário.



C.20 Indicar no ciclo as imagens dos seguintes números reais:  $\frac{\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{7\pi}{8}, \frac{13\pi}{6}, -\frac{15\pi}{2}, \frac{17\pi}{4}$  e  $-\frac{31\pi}{4}$ .

C.21 Representar, no ciclo, as imagens dos seguintes conjuntos de números:

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

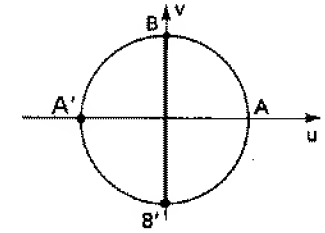
**Solução**

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$k = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} \text{ (imagem: B)}$$

$$k = 1 \implies x = \frac{3\pi}{2} \text{ (imagem: B')}$$

$$k = 2 \implies x = \frac{5\pi}{2} \text{ (repetição: B)}$$



O conjunto E tem como imagem os pontos B e B' do ciclo.

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2}$$

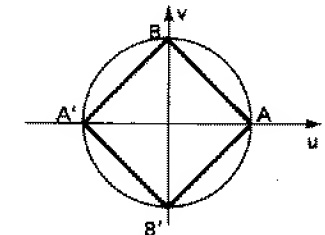
$$k = 0 \implies x = 0 \text{ (imagem: A)}$$

$$k = 1 \implies x = \frac{\pi}{2} \text{ (imagem: B)}$$

$$k = 2 \implies x = \pi \text{ (imagem: A')}$$

$$k = 3 \implies x = \frac{3\pi}{2} \text{ (imagem: B')}$$

$$k = 4 \implies x = 2\pi \text{ (repetição: A)}$$



O conjunto F tem como imagem os pontos A, B, A' e B' do ciclo.

C.22 Representar, no ciclo, as imagens dos seguintes conjuntos de números reais:

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$



## Padre refugia-se na Matemática

Bernhard Bolzano nasceu e morreu em Praga, Tchecoslováquia, e embora fosse padre tinha idéias contrárias às da Igreja.

Suas descobertas matemáticas foram muito pouco reconhecidas por seus contemporâneos.

Em 1817 publicou o livro "*Rein Analytisches Beweis*" (Prova puramente analítica), provando através de métodos aritméticos o teorema de locação em Álgebra, exigindo para isso um conceito não geométrico de continuidade de uma curva ou função.

Bolzano, a essa época, já havia percebido tão bem a necessidade de rigor em Análise, que Klein o chamou "pai da aritmetização", embora tivesse menos influência que Cauchy com sua análise baseada em conceitos geométricos mas, embora os dois nunca tivessem se encontrado, suas definições de limite, derivada, continuidade e convergência eram bem semelhantes.

Em uma obra póstuma de 1850, Bolzano chegou a enunciar propriedades importantes dos conjuntos finitos e, apoiando-se nas teorias de Galileu, mostrou que existem tantos números reais entre 0 e 1, quanto entre 0 e 2, ou tantos em um segmento de reta de um centímetro quanto em um segmento de reta de dois centímetros.

Parece ter percebido que a infinidade de números reais é de tipo diferente da infinidade de números inteiros, sendo não enumeráveis, estando mais próximo da Matemática moderna do que qualquer um de seus contemporâneos.

Em 1834, Bolzano havia imaginado uma função contínua num intervalo e que não tinha derivada em nenhum ponto desse intervalo mas o exemplo dado não ficou conhecido em sua época, sendo todos os méritos dados a Weierstrass que se ocupou em redescobrir esses resultados, depois de cinquenta anos. Conhecemos hoje como teorema de Bolzano-Weierstrass aquele segundo o qual um conjunto limitado contendo infinitos elementos, pontos ou números, tem ao menos um ponto de acumulação.

O mesmo aconteceu com os critérios de convergência de séries infinitas que levam hoje o nome de Cauchy e assim também com outros resultados.

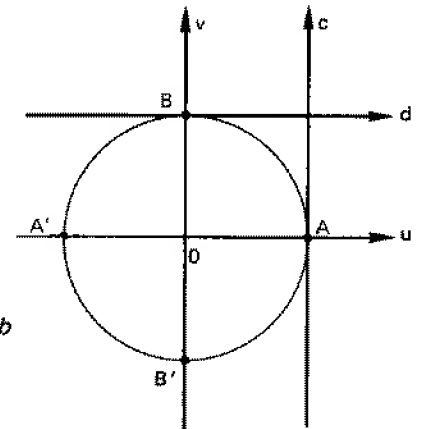
Há quem diga que Bolzano era "uma voz clamando no deserto".

# FUNÇÕES CIRCULARES

## I. NOÇÕES GERAIS

12. Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A. Para o estudo das funções circulares vamos associar ao ciclo quatro eixos:

- 1º) eixo dos cossenos (u)  
direção: OA  
sentido positivo:  $O \rightarrow A$
- 2º) eixo dos senos (v)  
direção:  $\perp a$ , por O  
sentido positivo: de O  $\rightarrow$  B  
seco B tal que  $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2}$
- 3º) eixo das tangentes (c)  
direção: paralelo a v por A  
sentido positivo: o mesmo de b
- 4º) eixo das cotangentes (d)  
direção: paralelo a u por B  
sentido positivo: o mesmo de a.



13. Os eixos u e v dividem a circunferência em quatro arcos:  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BA'}$ ,  $\widehat{A'B'}$  e  $\widehat{B'A}$ . Dado um número real x, usamos a seguinte linguagem para efeito de localizar a imagem P de x no ciclo:

- x está no 1º quadrante  $\iff P \in \widehat{AB} \iff 0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- x está no 2º quadrante  $\iff P \in \widehat{BA'} \iff \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$
- x está no 3º quadrante  $\iff P \in \widehat{A'B'} \iff \pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$
- x está no 4º quadrante  $\iff P \in \widehat{B'A} \iff \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$

## II. FUNÇÕES PERIÓDICAS

### 14. Exemplo preliminar

Dado o número real  $x$ , sempre existem dois números inteiros consecutivos  $n$  e  $n + 1$  tais que  $n \leq x < n + 1$ . Consideremos a função  $f$  que associa a cada real  $x$  o real  $x - n$  onde  $n$  é o maior número inteiro que não supera  $x$ . Temos, por exemplo:

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 0,1; & f(1,1) &= 1,1 - 1 = 0,1; & f(2,1) &= 2,1 - 2 = 0,1; \\ f(3) &= 3 - 3 = 0; & f(-5) &= (-5) - (-5) = 0; & f(7) &= 7 - 7 = 0. \end{aligned}$$

De modo geral, temos:

$$0 \leq x < 1 \implies f(x) = x - 0 = x$$

$$1 \leq x < 2 \implies f(x) = x - 1$$

$$2 \leq x < 3 \implies f(x) = x - 2$$

etc.

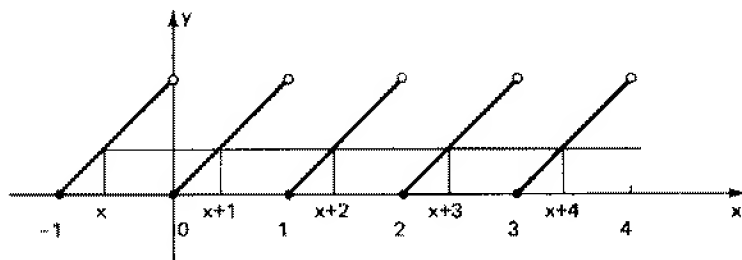
$$-1 \leq x < 0 \implies f(x) = x - (-1) = x + 1$$

$$-2 \leq x < -1 \implies f(x) = x - (-2) = x + 2$$

$$-3 \leq x < -2 \implies f(x) = x - (-3) = x + 3$$

etc.

Seu gráfico é:



Temos:

$$f(x) = f(x + 1) = f(x + 2) = f(x + 3) = f(x + 4) = \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

portanto existem infinitos números  $p$  inteiros tais que  $f(x) = f(x + p)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

15. O menor número  $p > 0$  que satisfaz a igualdade  $f(x) = f(x + p)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  é o número  $p = 1$ , denominado *período da função f*. A função  $f$  é chamada função periódica porque foi possível encontrar um número  $p > 0$  tal que

dando acréscimos iguais a  $p$  em  $x$ , o valor calculado para  $f$  não se altera, isto é, o valor de  $f$  se repete periodicamente para cada acréscimo de  $p$  à variável.

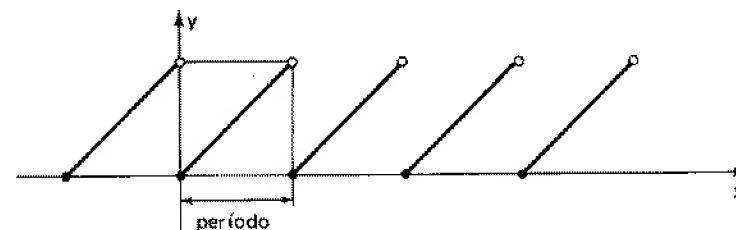
### 16. Definição

Uma função  $f: A \rightarrow B$  é *periódica* se existir um número  $p > 0$  satisfazendo a condição

$$f(x + p) = f(x), \quad \forall x \in A$$

O menor valor de  $p$  que satisfaz a condição acima é chamado *período de f*.

17. O gráfico da função periódica se caracteriza por apresentar um elemento de curva que se repete, isto é, se quisermos desenhar toda a curva bastará construirmos um carimbo onde está desenhado o tal elemento de curva e ir carimbando. *Período* é o comprimento do carimbo (medido no eixo dos  $x$ ).

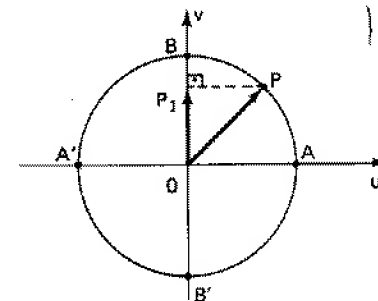


## III. FUNÇÃO SENO

### 18. Definição

Dado um número real  $x$ , seja  $P$  sua imagem no ciclo. Denominamos seno de  $x$  (e indicamos  $\text{sen } x$ ) a ordenada  $\overline{OP}_1$  do ponto  $P$  em relação ao sistema  $uOv$ . Denominamos *função seno* a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada real  $x$  o real  $\overline{OP}_1 = \text{sen } x$ , isto é:

$$f(x) = \text{sen } x.$$



## 19. Propriedades

1ª) A imagem da função seno é o intervalo  $[-1, 1]$ , isto é,  $-1 \leq \sin x \leq 1$  para todo  $x$  real.

É imediata a justificação pois, se  $P$  está no ciclo, sua ordenada pode variar apenas de  $-1$  a  $+1$ .

2ª) Se  $x$  é do primeiro ou segundo quadrante, então  $\sin x$  é positivo.

De fato, neste caso o ponto  $P$  está acima do eixo  $u$  e sua ordenada é positiva.

3ª) Se  $x$  é do terceiro ou quarto quadrante, então  $\sin x$  é negativo.

De fato, neste caso o ponto  $P$  está abaixo do eixo  $u$  e sua ordenada é negativa.

4ª) Se  $x$  percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então  $\sin x$  é crescente.

É imediato que, se  $x$  percorre o primeiro quadrante, então  $P$  percorre o arco  $\widehat{AB}$  e sua ordenada cresce. Fato análogo acontece no quarto quadrante.

5ª) Se  $x$  percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então  $\sin x$  é decrescente.

É imediato que, se  $x$  percorre o segundo quadrante, então  $P$  percorre o arco  $\widehat{BA'}$  e sua ordenada decresce. Fato análogo acontece no terceiro quadrante.

6ª) A função seno é periódica e seu período é  $2\pi$ .

É imediato que, se  $\sin x = \overline{OP_1}$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , então  $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \overline{OP_1}$ , pois  $x$  e  $x + k \cdot 2\pi$  têm a mesma imagem  $P$  no ciclo. Temos, então, para todo  $x$  real:

$$\sin x = \sin(x + k \cdot 2\pi)$$

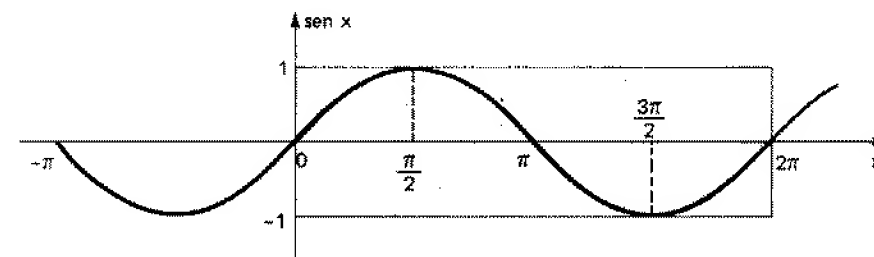
e, portanto, a função seno é periódica. Seu período é o menor valor positivo de  $k \cdot 2\pi$ , isto é,  $2\pi$ .

## 20. Gráfico

Façamos  $x$  percorrer o intervalo  $[0, 2\pi]$  e vejamos o que acontece com  $\sin x$ . Se a imagem de  $x$  (ponto  $P$ ) dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário, a ordenada de  $P$  varia segundo a tabela:

$x$	0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi$		$\frac{3\pi}{2}$		$2\pi$
$\sin x$	0	cresce	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0

Fazendo um diagrama com  $x$  em abscissas e  $\sin x$  em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado *senóide*, que nos indica como varia a função  $f(x) = \sin x$ .



Observemos que, como o domínio da função seno é  $\mathbb{R}$ , a senóide continua para a direita de  $2\pi$  e para a esquerda de 0. No retângulo em destaque está representado apenas um período da função. Notemos ainda que as dimensões desse retângulo são  $2\pi \times 2$ , isto é, aproximadamente  $6,28 \times 2$ .

## EXERCÍCIOS

Determinar o período e a imagem e fazer o gráfico de um período completo das funções dadas do C.23 ao C.42:

C.23  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -\sin x$ .

### Solução

Vamos construir uma tabela em três etapas:

- 1ª) atribuímos valores a  $x$ ;
- 2ª) associamos a cada  $x$  o valor de  $\sin x$ ;
- 3ª) multiplicamos  $\sin x$  por  $-1$ .

x	sen x	y
0		
$\frac{\pi}{2}$		
$\pi$		
$\frac{3\pi}{2}$		
$2\pi$		

x	sen x	y
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
$\pi$	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
$2\pi$	0	

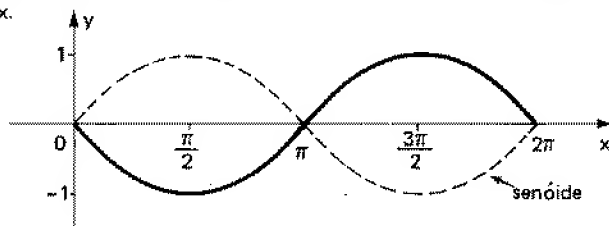
x	sen x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	-1
$\pi$	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	1
$2\pi$	0	0

Com esta tabela podemos obter 5 pontos do gráfico, que é simétrico da senóide em relação ao eixo dos x.

É imediato que:

$$\text{Im}(f) = [-1, 1]$$

$$\rho(f) = 2\pi$$



C.24  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2 \cdot \text{sen } x$

**Solução**

Vamos construir uma tabela em três etapas:

- 1ª) atribuímos valores a x;
- 2ª) associamos a cada x o valor de sen x;
- 3ª) multiplicamos sen x por 2.

x	sen x	y
0		
$\frac{\pi}{2}$		
$\pi$		
$\frac{3\pi}{2}$		
$2\pi$		

x	sen x	y
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
$\pi$	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
$2\pi$	0	

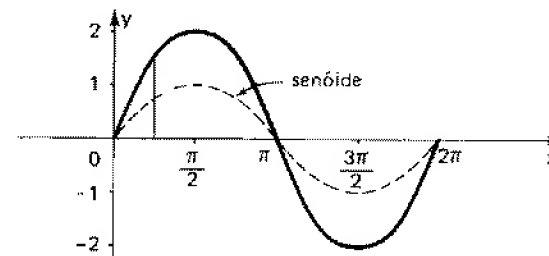
x	sen x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	2
$\pi$	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
$2\pi$	0	0

Com esta tabela podemos obter 5 pontos do gráfico, que deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o dobro da ordenada correspondente da senóide.

É imediato que:

$$\text{Im}(f) = [-2, 2]$$

$$\rho(f) = 2\pi$$



25  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -2 \cdot \text{sen } x$ .

26  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = |\text{sen } x|$ .

**Solução**

Recordemos inicialmente que para um dado número real a, temos:

$$a \geq 0 \implies |a| = a$$

$$a < 0 \implies |a| = -a$$

Aplicando esta definição, temos:

$$\text{sen } x \geq 0 \implies |\text{sen } x| = \text{sen } x$$

(quando  $\text{sen } x \geq 0$ , os gráficos  $y = |\text{sen } x|$  e  $y = \text{sen } x$  coincidem)

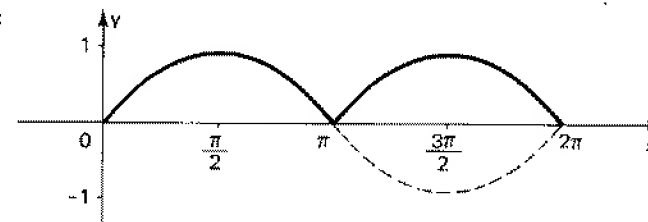
$$\text{sen } x < 0 \implies |\text{sen } x| = -\text{sen } x$$

(quando  $\text{sen } x < 0$ , os gráficos  $y = |\text{sen } x|$  e  $y = \text{sen } x$  são simétricos em relação ao eixo dos x).

É imediato que:

$$\text{Im}(f) = [0, 1]$$

$$\rho(f) = \pi$$



27  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = |3 \cdot \text{sen } x|$

28  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \text{sen } 2x$

**Solução**

Vamos construir uma tabela em três etapas:

- 1ª) atribuímos valores a  $t = 2x$ ;
- 2ª) associamos a cada  $2x$  o correspondente  $\text{sen } 2x$ ;
- 3ª) calculamos  $x$  ( $x = \frac{t}{2}$ ).

x	$t = 2x$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	$\pi$	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	$2\pi$	

x	$t = 2x$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	$\pi$	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	$2\pi$	0

x	$t = 2x$	y
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\pi$	$2\pi$	0

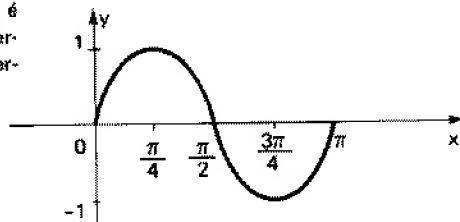
Com base nesta tabela, podemos obter 5 pontos da curva. Notemos que o gráfico deve apresentar para cada  $x$  uma ordenada  $y$  que é o seno do dobro de  $x$ . Notemos ainda que para  $\sin t$  completar um período é necessário que  $t = 2x$  percorra o intervalo  $[0, 2\pi]$ , isto é,  $x$  percorra o intervalo  $[0, \pi]$ .

Assim, o período de  $f$  é:

$$p(f) = \pi - 0 = \pi$$

É imediato que:

$$\text{Im}(f) = [-1, 1]$$



C.29  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ .

Solução

x	$t = \frac{x}{2}$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	$\pi$	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	$2\pi$	

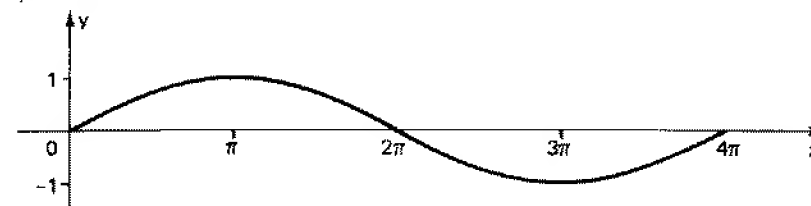
x	$t = \frac{x}{2}$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	$\pi$	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	$2\pi$	0

x	$t = \frac{x}{2}$	y
0	0	0
$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	1
$2\pi$	$\pi$	0
$3\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$4\pi$	$2\pi$	0

É imediato que:

$$\text{Im}(f) = [-1, 1]$$

$$p(f) = 4\pi$$



C.30  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sin 3x$

Solução

x	$t = 3x$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	$\pi$	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	$2\pi$	

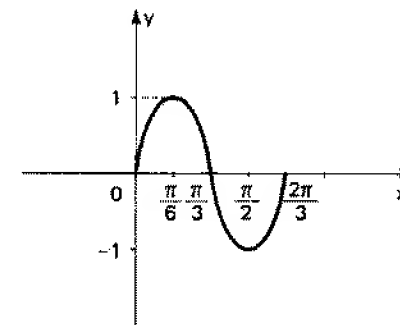
x	$t = 3x$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	$\pi$	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	$2\pi$	0

x	$t = 3x$	y
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\pi$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{2\pi}{3}$	$2\pi$	0

É imediato que:

$$\text{Im}(f) = [-1, 1]$$

$$p(f) = \frac{2\pi}{3}$$



C.31  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -\sin \frac{x}{3}$ .

C.32  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 3 \cdot \sin 4x$ .

C.33  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1 + \sin x$ .

**Solução**

x	sen x	y
0		
$\frac{\pi}{2}$		
$\pi$		
$\frac{3\pi}{2}$		
$2\pi$		

x	sen x	y
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
$\pi$	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
$2\pi$	0	

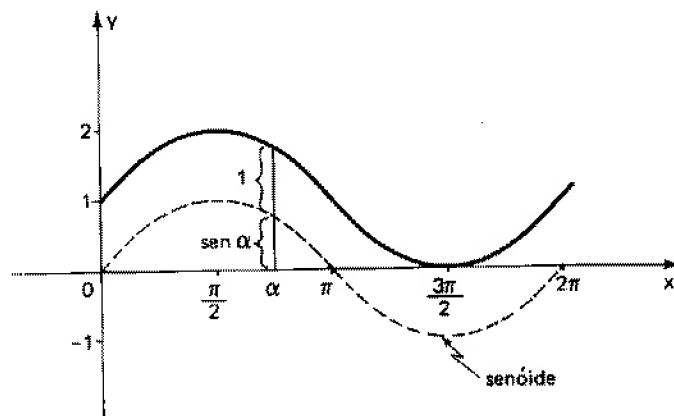
x	sen x	y
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	2
$\pi$	0	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
$2\pi$	0	1

Notemos que o gráfico deve apresentar para cada  $x$  uma ordenada  $y$  que é igual ao seno de  $x$  mais uma unidade. Se cada seno sofre um acréscimo de 1, então a senóide sofre uma translação de uma unidade "para cima".

É imediato que:

$$\text{Im}(f) = [0, 2]$$

$$p(f) = 2\pi$$



C.34  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -2 + \sin x$ .

C.35  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1 + 2 \cdot \sin x$ .

C.36  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2 - \sin x$ .

C.37  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -1 + \sin 2x$ .

C.38  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1 + 3 \cdot \sin \frac{x}{2}$ .

C.39  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ .

**Solução**

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	$\pi$	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	$2\pi$	

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	$\pi$	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	$2\pi$	0

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
$\frac{\pi}{4}$	0	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{5\pi}{4}$	$\pi$	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{9\pi}{4}$	$2\pi$	0

Notemos que o gráfico deve apresentar para cada  $x$  uma ordenada  $y$  que é o seno de  $x - \frac{\pi}{4}$ . Notemos que para  $\sin t$  completar um período é necessário que  $t = x - \frac{\pi}{4}$

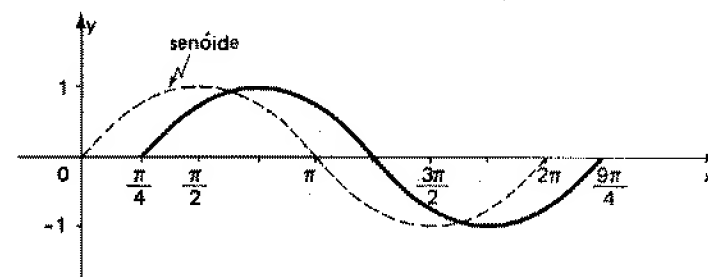
percorra o intervalo  $[0, 2\pi]$ , isto é,  $x$  percorra o intervalo  $[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$ . Assim, o

período de  $f$  é:

$$p(f) = \frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

É imediato que:

$$\text{Im}(f) = [-1, 1].$$



C.40  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ .

C.41  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ .

C.42  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1 + 2 \cdot \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})$ .

- C.43 Sendo  $a, b, c, d$  números reais e positivos, determinar imagem e período da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$ .

#### Solução

Façamos  $cx + d = t$ . Quando  $x$  percorre  $\mathbb{R}$ ,  $t$  percorre  $\mathbb{R}$  (pois a função  $afim$   $t = ax + b$  é sobrejetora) e, em consequência,  $\sin t$  percorre o intervalo  $[-1, 1]$ ,  $b \cdot \sin t$  percorre o intervalo  $[-b, b]$  e  $y = a + b \cdot \sin t$  percorre o intervalo  $[a - b, a + b]$ , que é a imagem de  $f$ .

Para que  $f$  complete um período é necessário que  $t$  varie de  $0$  a  $2\pi$ , então:

$$t = 0 \implies cx + d = 0 \implies x = -\frac{d}{c}$$

$$t = 2\pi \implies cx + d = 2\pi \implies x = \frac{2\pi}{c} - \frac{d}{c}$$

portanto:

$$p = \Delta x = \left(\frac{2\pi}{c} - \frac{d}{c}\right) - \left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{2\pi}{c}.$$

- C.44 Construir o gráfico de um período da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = 1 - 2 \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

- C.45 Para que valores de  $m$  existe  $x$  tal que  $\sin x = 2m - 5$ ?

#### Solução

Para que exista  $x$  satisfazendo a igualdade acima devemos ter:

$$-1 \leq 2m - 5 \leq 1 \iff 4 \leq 2m \leq 6 \iff 2 \leq m \leq 3.$$

- C.46 Em cada caso abaixo, para que valores de  $m$  existe  $x$  satisfazendo a igualdade?

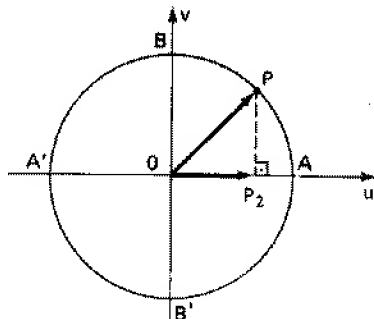
a)  $\sin x = 2 - 5m$ ;

b)  $\sin x = \frac{m-1}{m-2}$ .

## IV. FUNÇÃO COSSENO

### 21. Definição

Dado um número real  $x$ , seja  $P$  sua imagem no ciclo. Denominamos **coseno** de  $x$  (e indicamos  $\cos x$ ) a abscissa  $\overline{OP_2}$  do ponto  $P$  em relação ao sistema  $uOv$ . Denominamos **função cosseno** a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada real  $x$  o real  $\overline{OP_2} = \cos x$ , isto é,  $f(x) = \cos x$ .



### 22. Propriedades

1ª) A imagem da função cosseno é o intervalo  $[-1, 1]$ , isto é,  $-1 \leq \cos x \leq 1$  para todo  $x$  real.

2ª) Se  $x$  é do primeiro ou quarto quadrante, então  $\cos x$  é positivo.

3ª) Se  $x$  é do segundo ou terceiro quadrante, então  $\cos x$  é negativo.

4ª) Se  $x$  percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então  $\cos x$  é crescente.

5ª) Se  $x$  percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então  $\cos x$  é decrescente.

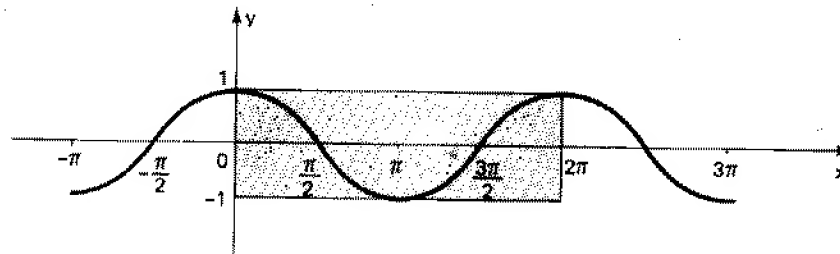
6ª) A função cosseno é periódica e seu período é  $2\pi$ .

### 23. Gráfico

Façamos  $x$  percorrer o intervalo  $[0, 2\pi]$  e vejamos o que acontece com  $\cos x$ . Se a imagem de  $x$  (ponto  $P$ ) dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário, a abscissa de  $P$  varia segundo a tabela:

$x$	0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi$		$\frac{3\pi}{2}$		$2\pi$
$\cos x$	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	cresce	1

Fazendo um diagrama com  $x$  em abscissas e  $\cos x$  em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado **cossenóide**, que nos indica como varia a função  $f(x) = \cos x$ .



Observemos que, como o domínio da função cosseno é  $\mathbb{R}$ , a cossenóide continua para a direita de  $2\pi$  e para a esquerda de  $0$ . No retângulo em destaque está representado apenas um período da função. Notemos ainda que as dimensões desse retângulo são  $2\pi \times 2$ , isto é, aproximadamente  $6,28 \times 2$ .

## EXERCÍCIOS

Determinar o período e a imagem e fazer o gráfico de um período completo das funções dadas do C.47 ao C.56:

C.47  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -\cos x$ .

C.48  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2 \cdot \cos x$ .

C.49  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -3 \cdot \cos x$ .

C.50  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = |\cos x|$ .

C.51  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \cos 2x$ .

C.52  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ .

C.53  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1 + \cos x$ .

C.54  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1 + 2 \cdot \cos 3x$ .

C.55  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ .

C.56  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2 \cdot \cos(x - \frac{\pi}{3})$ .

C.57 Determinar imagem e período da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -1 + 2 \cdot \cos(3x - \frac{\pi}{4})$ .

C.58 Para que valores de  $t$  existe  $x$  satisfazendo a igualdade  $\cos x = \frac{t+2}{2t-1}$ ?

C.59 Determinar o sinal da expressão  $y = \sin 107^\circ + \cos 107^\circ$ .

### Solução

Examinando o ciclo, notamos que:

$$|\sin 135^\circ| = |\cos 135^\circ|$$

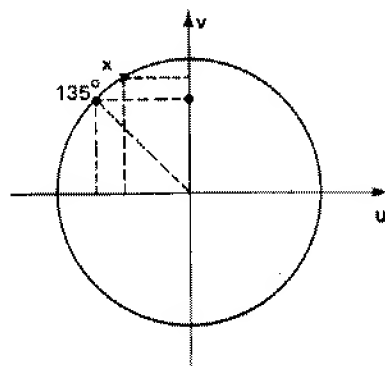
e

$$90^\circ < x < 135^\circ \Rightarrow |\sin x| > |\cos x|.$$

Como  $\sin 107^\circ > 0$ ,  $\cos 107^\circ < 0$

e  $|\sin 107^\circ| > |\cos 107^\circ|$ , decorre:

$$\sin 107^\circ + \cos 107^\circ > 0.$$



C.60 Qual é o sinal de cada uma das seguintes expressões?

$$y_1 = \sin 45^\circ + \cos 45^\circ$$

$$y_2 = \sin 225^\circ + \cos 225^\circ$$

$$y_3 = \sin \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}$$

$$y_4 = \sin 300^\circ + \cos 300^\circ$$

C.61 Esboçar o gráfico da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \sin x + \cos x$ .

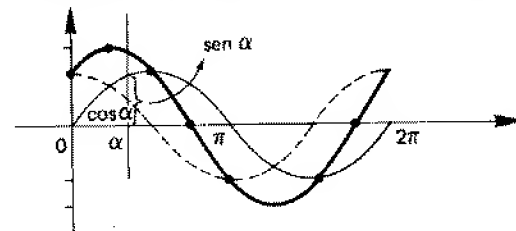
### Solução

Notamos que para cada  $x$  esta função associa um  $y$  que é a soma do seno com o cosseno de  $x$ . Vamos, então, colocar num diagrama a senóide e a cossenóide e, para cada  $x$ , somemos as ordenadas dos pontos encontrados em cada curva.

Veremos mais adiante que:

$$\text{Im}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$\text{p}(f) = 2\pi.$$



C.62 Esboçar o gráfico de um período da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \cos x - \sin x$ .

C.63 Provar que se  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  então  $\sin x + \cos x > 1$ .

Sugestão: ciclo trigonométrico.

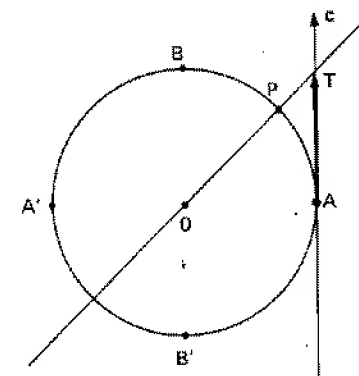
## V. FUNÇÃO TANGENTE

### 24. Definição

Dado um número real  $x$ ,

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

seja  $P$  sua imagem no ciclo. Consideremos a reta  $\overleftrightarrow{OP}$  e seja  $T$  sua intersecção com o eixo das tangentes. Denominamos *tangente de  $x$*  (e indicamos  $\text{tg } x$ ) a medida algébrica do segmento  $\overline{AT}$ .





Denominamos *função tangente* a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada real  $x$ ,  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , o real  $\overline{AT} = \text{tg } x$ , isto é,  $f(x) = \text{tg } x$ .

Notemos que, para  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $P$  está em  $B$  ou  $B'$  e, então, a reta  $\overleftrightarrow{OP}$  fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto  $T$ , a  $\text{tg } x$  não é definida.

## 25. Propriedades

1ª) O domínio da função tangente é  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ .

2ª) A imagem da função tangente é  $\mathbb{R}$ , isto é, para todo  $y$  real existe um  $x$  real tal que  $\text{tg } x = y$ .

De fato, dado  $y \in \mathbb{R}$ , consideremos sobre o eixo das tangentes o ponto  $T$  tal que  $\overline{AT} = y$ . Construindo a reta  $\overleftrightarrow{OT}$ , observamos que ela intercepta o ciclo em dois pontos  $P$  e  $P'$ , imagens dos reais  $x$  cuja tangente é  $y$ .

3ª) Se  $x$  é do primeiro ou terceiro quadrante, então  $\text{tg } x$  é positiva.

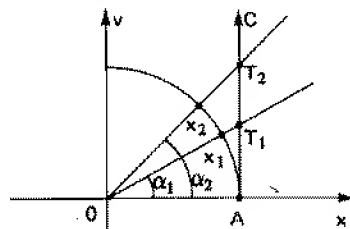
De fato, neste caso o ponto  $T$  está acima de  $A$  e  $\overline{AT}$  é positiva.

4ª) Se  $x$  é do segundo ou quarto quadrante, então  $\text{tg } x$  é negativa.

De fato, neste caso o ponto  $T$  está abaixo de  $A$  e  $\overline{AT}$  é negativa.

5ª) Se  $x$  percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então  $\text{tg } x$  é crescente.

Provemos, por exemplo, quando  $x$  percorre o 1º quadrante. Dados  $x_1$  e  $x_2$ , com  $x_1 < x_2$ , temos  $\alpha_1 < \alpha_2$  e, por propriedade de Geometria Plana, vem  $\overline{AT}_1 < \overline{AT}_2$ , isto é:  $\text{tg } x_1 < \text{tg } x_2$ .



6ª) A função tangente é periódica e seu período é  $\pi$ .

De fato, se  $\text{tg } x = \overline{AT}$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , então  $\text{tg}(x + k\pi) = \overline{AT}$  pois  $x$  e  $x + k\pi$  têm imagens  $P$  e  $P'$  coincidentes ou diametralmente opostas no ciclo e, assim,  $\overleftrightarrow{OP} = \overleftrightarrow{OP'}$ , portanto,  $\overleftrightarrow{OP} \cap c = \overleftrightarrow{OP'} \cap c$ .

Temos, então, para todo  $x$  real e  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ :

$$\text{tg } x = \text{tg}(x + k\pi)$$

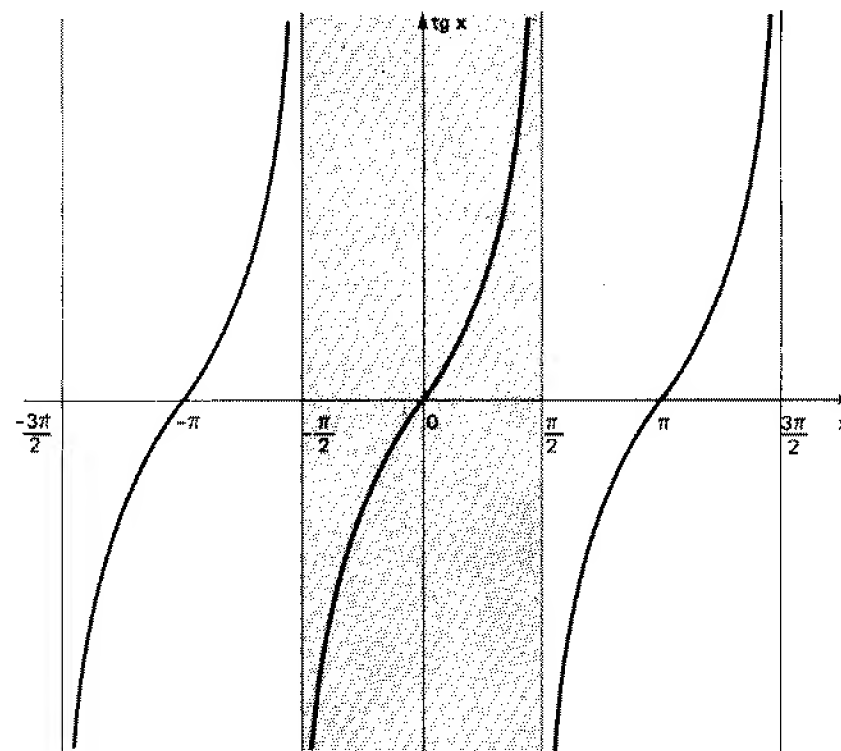
e a função tangente é periódica. Seu período é o menor valor positivo de  $k\pi$ , isto é,  $\pi$ .

## 26. Gráfico

Façamos  $x$  percorrer o intervalo  $[0, 2\pi]$  e vejamos o que acontece com  $\text{tg } x$ . Se a imagem de  $x$  (ponto  $P$ ) dá uma volta completa no ciclo no sentido anti-horário, a medida algébrica  $\overline{AT}$  varia segundo a tabela:

$x$	0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi$		$\frac{3\pi}{2}$		$2\pi$
$\text{tg } x$	0	cresce	$\neq$	cresce	0	cresce	$\neq$	cresce	0

Fazendo um diagrama com  $x$  em abscissas e  $\text{tg } x$  em ordenadas, podemos construir o gráfico seguinte, denominado *tangentóide*, que nos indica a variação da função  $f(x) = \text{tg } x$ .



## EXERCÍCIOS

**C.64** Qual é o domínio da função real  $f$  tal que  $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ ?

### Solução

Façamos  $2x = t$ . Sabemos que existe  $\operatorname{tg} t$  se, e somente se,  $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), então:

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \implies x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad e$$

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**C.65** Qual é o domínio das seguintes funções reais?

a)  $f(x) = \operatorname{tg} 3x$                       b)  $g(x) = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ .

**C.66** Qual é o sinal de cada uma das seguintes expressões?

$$y_1 = \operatorname{tg} 269^\circ + \operatorname{sen} 178^\circ \quad y_2 = \operatorname{tg} \frac{12\pi}{7} + \left( \operatorname{sen} \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{23\pi}{12} \right).$$

**C.67** Para que valores de  $\alpha$  existe  $x$  tal que  $\operatorname{tg} x = \sqrt{\alpha^2 - 5\alpha + 4}$ ?

**C.68** Esboçar o gráfico, dar o domínio e o período da função real  $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

**Solução:**

Façamos  $x - \frac{\pi}{4} = t$ . Temos:  $\exists \operatorname{tg} t \Rightarrow t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

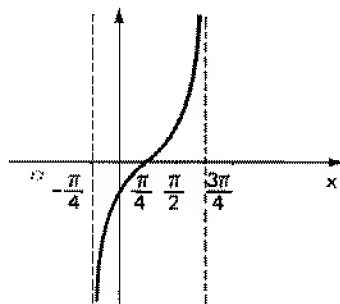
então  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Para  $tg\ t$  descrever um período completo devemos ter;

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

então  $p(f) = \frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \pi$ .

Como a função associa a cada  $x$  a  $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$ , teremos (por analogia com as funções já vistas) um gráfico que é a tangente deslocada de  $\frac{\pi}{4}$  para a direita.

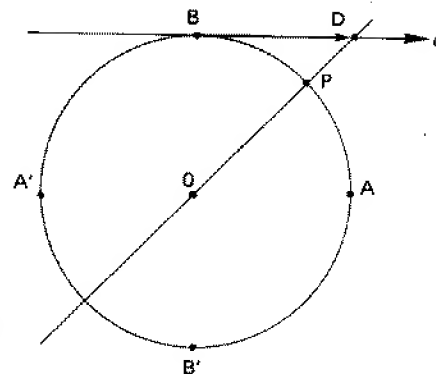


**C.69** Esboçar o gráfico, dar o domínio e o período da função real  $f(x) = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

## VI. FUNÇÃO COTANGENTE

## 27. Definição

Dado um número real  $x$ ,  $x \neq k\pi$ , seja  $P$  sua imagem no ciclo. Consideremos a reta  $\overleftrightarrow{OP}$  e seja  $D$  sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denominamos cotangente de  $x$  (e indicamos  $\cotg x$ ) a medida algébrica do segmento  $\overline{BD}$ . Denominamos *função cotangente* a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada real  $x$ ,  $x \neq k\pi$ , o real  $\overline{BD} = \cotg x$ , isto é,  $f(x) = \cotg x$ .



Notemos que, para  $x = k\pi$ ,  $\frac{P}{OP}$  está em A ou A' e, então, a reta fica paralela ao eixo das cotangentes. Como neste caso não existe o ponto D, a  $\cotg x$  não é definida.

## 28. Propriedades

1.ª) O domínio da função cotangente é  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$ .

2ª) A imagem da função cotangente é  $\mathbb{R}$ , isto é, para todo  $y$  real existe um  $x$  real tal que  $\cotg x = y$ .

3ª) Se  $x$  é do primeiro ou terceiro quadrante, então  $\cotg x$  é positiva.

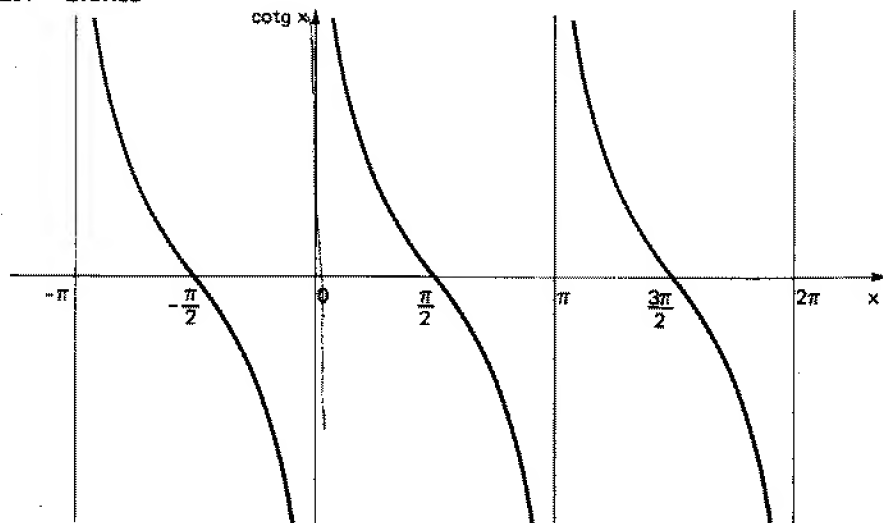
4ª) Se  $x$  é do segundo ou quarto quadrante, então  $\cotg x$  é negativa.

5ª) Se  $x$  percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então  $\cotg x$  é decrescente.

6ª) A função cotangente é periódica e seu período é  $\pi$ .

As demonstrações dessas propriedades ficam como exercício para o leitor.

## 29. Gráfico



## 31. Propriedades

1ª) O domínio da função secante é  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ .

2ª) A imagem da função secante é  $\mathbb{R} - ]-1, 1[$ , isto é, para todo real  $y$ , com  $y \leq -1$  ou  $y \geq 1$ , existe um  $x$  real tal que  $\sec x = y$ .

3ª) Se  $x$  é do primeiro ou quarto quadrante, então  $\sec x$  é positiva.

4ª) Se  $x$  é do segundo ou terceiro quadrante, então  $\sec x$  é negativa.

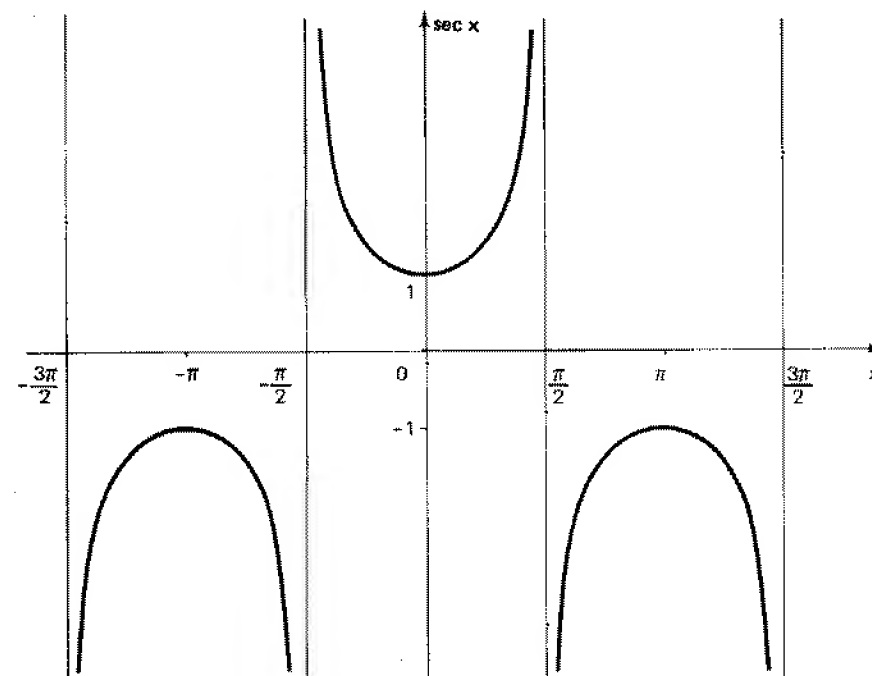
5ª) Se  $x$  percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então  $\sec x$  é crescente.

6ª) Se  $x$  percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então  $\sec x$  é decrescente.

7ª) A função secante é periódica e seu período é  $2\pi$ .

As demonstrações dessas propriedades ficam como exercício para o leitor.

## 32. Gráfico



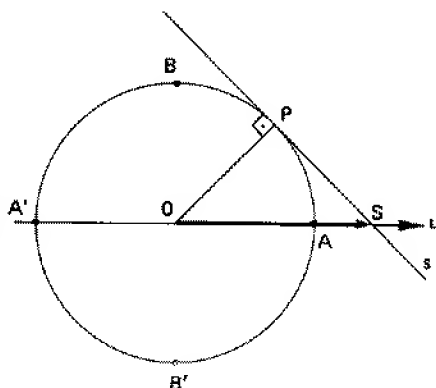
## VII. FUNÇÃO SECANTE

### 30. Definição

Dado um número real  $x$ ,

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

seja  $P$  sua imagem no ciclo. Considere-mos a reta  $s$  tangente ao ciclo em  $P$  e seja  $S$  sua intersecção com o eixo dos cossenos. Denominamos secante de  $x$  (e indicamos  $\sec x$ ) a abscissa  $\overline{OS}$  do ponto  $S$ . Denominamos *função secante* a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada real  $x$ ,  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , o real  $\overline{OS} = \sec x$ , isto é,  $f(x) = \sec x$ .



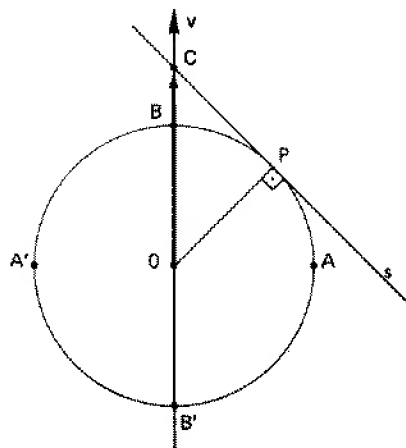
Notemos que, para  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $P$  está em  $B$  ou  $B'$  e, então, a reta  $s$  fica paralela ao eixo dos cossenos. Como neste caso não existe o ponto  $S$ , a  $\sec x$  não é definida.

## VIII. FUNÇÃO COSSECANTE

### 33. Definição

Dado um número real  $x$ ,  $x \neq k\pi$ , seja  $P$  sua imagem no ciclo. Consideremos a reta  $s$  tangente ao ciclo em  $P$  e seja  $C$  sua intersecção com o eixo dos senos. Denominamos cossecante de  $x$  (e indicamos por  $\operatorname{cossec} x$ ) a ordenada  $\overline{OC}$  do ponto  $C$ . Denominamos *função cossecante* a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada real  $x$ ,  $x \neq k\pi$ , o real  $\overline{OC} = \operatorname{cossec} x$ , isto é,  $f(x) = \operatorname{cossec} x$ .

Notemos que, para  $x = k\pi$ ,  $P$  está em  $A$  ou  $A'$  e, então, a reta  $s$  fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe o ponto  $C$ , a  $\operatorname{cossec} x$  não é definida.

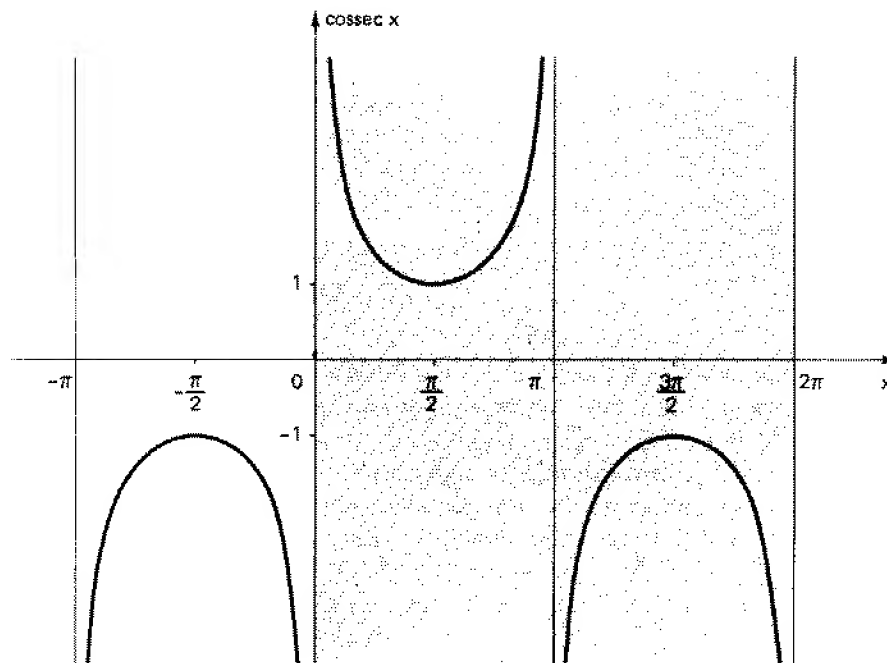


### 34. Propriedades

- 1ª) O domínio da função cossecante é  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$ .
- 2ª) A imagem da função cossecante é  $\mathbb{R} - ]-1, 1[$ , isto é, para todo real  $y$ , com  $y \leq -1$  ou  $y \geq 1$ , existe um  $x$  real tal que  $\operatorname{cossec} x = y$ .
- 3ª) Se  $x$  é do primeiro ou segundo quadrante, então  $\operatorname{cossec} x$  é positiva.
- 4ª) Se  $x$  é do terceiro ou quarto quadrante, então  $\operatorname{cossec} x$  é negativa.
- 5ª) Se  $x$  percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então  $\operatorname{cossec} x$  é crescente.
- 6ª) Se  $x$  percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então  $\operatorname{cossec} x$  é decrescente.
- 7ª) A função cossecante é periódica e seu período é  $2\pi$ .

As demonstrações dessas propriedades ficam como exercício para o leitor.

### 35. Gráfico



período completo da função cossecante

### EXERCÍCIOS

C.70 Determinar domínio e período das seguintes funções reais:

$$f(x) = \cotg\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \quad g(x) = \sec 2x, \quad h(x) = \operatorname{cossec}\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

C.71 Em cada caso determinar o conjunto ao qual  $m$  deve pertencer de modo que exista  $x$  satisfazendo a igualdade:

a)  $\cotg x = \sqrt{2 - m}$

b)  $\sec x = 3m - 2$

c)  $\operatorname{cossec} x = \frac{2m - 1}{1 - 3m}$

C.72 Determinar o sinal das seguintes expressões:

$$v_1 = \cos 91^\circ + \operatorname{cossec} 91^\circ$$

$$v_2 = \sin 107^\circ + \sec 107^\circ$$

$$v_3 = \sec \frac{9\pi}{8} \cdot \left( \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} + \cotg \frac{\pi}{7} \right).$$

# RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

## CONOUÇÃO OO CALOR : NOVA TEORIA

Jean Baptiste Joseph Fourier nasceu em Auxerre, em 1768. Órfão aos 8 anos, Fourier foi colocado no Colégio Militar, dirigido pelos beneditinos,

Aos 12 anos, Fourier começou a mostrar parte do seu talento, redigindo sermões para sacerdotes de várias cidades. Dois anos mais tarde iniciou seus estudos de Matemática, conseguindo grande destaque. Considerado menino-prodígio, foi convidado a ingressar na ordem dos beneditinos mas, antes de ordenar-se, chegou a Revolução de 1789.

Fourier que sempre desejara ser militar, aderiu com entusiasmo à causa da Revolução. Com a criação da Escola Normal e da Escola Politécnica, das quais foi conferencista, Fourier começou a desenvolver os trabalhos que o imortalizaram como matemático. Data dessa época sua teoria para calcular raízes irracionais das equações algébricas, cujo estudo Newton iniciara.



Jean B. J. Fourier  
(1768 - 1830)

Tendo acompanhado Napoleão no Egito, Fourier desenvolveu ali estudos de arqueologia, tornando-se especialista em egiptologia. Fourier trabalhou nessa época como engenheiro, dirigindo uma fábrica de armamentos do exército francês no Egito.

Voltando à França em 1812, Fourier desenvolveu, na sua obra "Memorial", uma teoria sobre a condução do calor, tornando-se precursor da Física-Matemática. Neste último estudo, o matemático francês foi levado a criar um novo tipo de desenvolvimento em série, diferente do método de Taylor por empregar funções periódicas em vez de potências, e que recebeu seu nome.

Em 1830, morreu Fourier, vítima de um aneurisma cerebral.

## I. INTRODUÇÃO

Para cada  $x \neq \frac{k\pi}{2}$  definimos  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{cotg} x$ ,  $\sec x$  e  $\operatorname{cosec} x$ .

Vamos mostrar agora que esses seis números guardam entre si certas relações denominadas relações fundamentais. Mais ainda, mostraremos que a partir de um deles sempre é possível calcular os outros cinco.

## II. RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

### 36. Teorema

Para todo  $x$  real vale a relação:

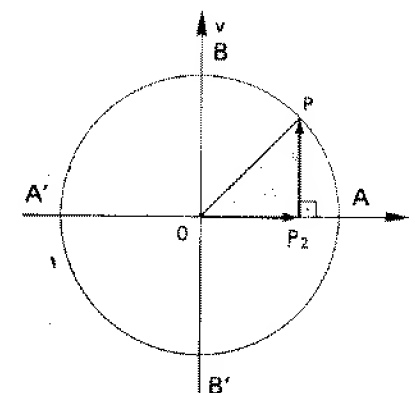
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

#### Demonstração

a) Se  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ , a imagem de  $x$  é distinta de A, B, A' e B', então existe o triângulo  $OP_2P$  retângulo, portanto:

$$|\overline{OP_2}|^2 + |\overline{P_2P}|^2 = |\overline{OP}|^2$$

$$\text{e } \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$



b) Se  $x = \frac{k\pi}{2}$ , podemos verificar diretamente a tese:

x	sen x	cos x	sen <sup>2</sup> x + cos <sup>2</sup> x
0	0	1	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0	1
$\pi$	0	-1	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	1

### 37. Teorema

Para todo x real,  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , vale a relação:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

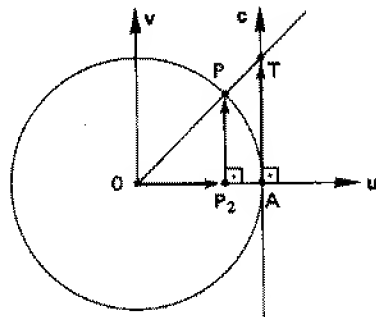
#### Demonstração

a) Se  $x \neq k\pi$ , a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos:

$$\triangle OAT \sim \triangle OP_2P$$

$$\frac{|AT|}{|OA|} = \frac{|P_2P|}{|OP_2|}$$

$$|\operatorname{tg} x| = \frac{|\operatorname{sen} x|}{|\cos x|} \quad (1)$$



Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal da  $\operatorname{tg} x$  é igual ao do quociente  $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$  (2)

De (1) e (2) decorre a tese

Q	sinal de $\operatorname{tg} x$	sinal de $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
1º	+	+
2º	-	-
3º	+	+
4º	-	-

b) Se  $x = k\pi$ , temos:

$$\operatorname{tg} x = 0 = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

### 38. Teorema

Para todo x real,  $x \neq k\pi$ , vale a relação:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

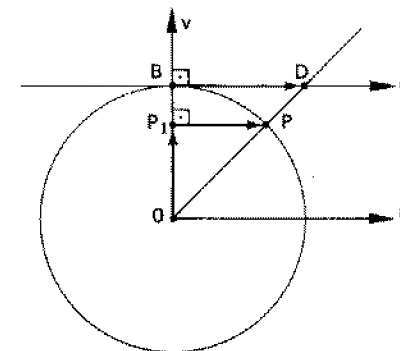
#### Demonstração

a) Se  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos:

$$\triangle OBD \sim \triangle OP_1P$$

$$\frac{|BD|}{|OB|} = \frac{|P_1P|}{|OP_1|}$$

$$|\operatorname{cotg} x| = \frac{|\cos x|}{|\operatorname{sen} x|} \quad (1)$$



Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal da  $\operatorname{cotg} x$  é igual ao sinal do quociente

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \quad (2)$$

De (1) e (2) decorre a tese.

Q	sinal de $\operatorname{cotg} x$	sinal de $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
1º	+	+
2º	-	-
3º	+	+
4º	-	-

b) Se  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , temos  $\operatorname{cotg} x = 0 = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

### 39. Teorema

Para todo  $x$  real,  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , vale a relação

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

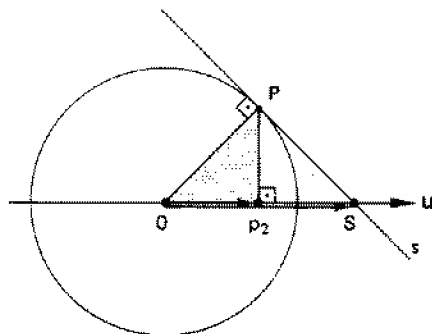
#### Demonstração

a) Se  $x \neq k\pi$ , a imagem de  $x$  é distinta de  $A, B, A'$  e  $B'$ , então temos:

$$\triangle OPS \sim \triangle OP_2P$$

$$\frac{|\overline{OS}|}{|\overline{OP}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OP}_2|}$$

$$|\sec x| = \frac{1}{|\cos x|} \quad (1)$$



Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal de  $\sec x$  é igual ao sinal de  $\cos x$  (2).

De (1) e (2) decorre a tese.

Q	sinal de $\sec x$	sinal de $\cos x$
1º	+	+
2º	-	-
3º	-	-
4º	+	+

b) Se  $x = k\pi$ , temos  $\sec x = 1 = \cos x$  ( $k$  par) ou  $\sec x = -1 = \cos x$  ( $k$  ímpar).

### 40. Teorema

Para todo  $x$  real,  $x \neq k\pi$ , vale a relação:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

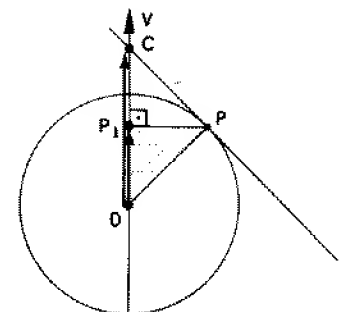
#### Demonstração

a) Se  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , a imagem de  $x$  é distinta de  $A, B, A'$  e  $B'$ , então temos:

$$\triangle OPC \sim \triangle OP_1P$$

$$\frac{|\overline{OC}|}{|\overline{OP}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OP}_1|}$$

$$|\operatorname{cosec} x| = \frac{1}{|\operatorname{sen} x|} \quad (1)$$



Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal de  $\operatorname{cosec} x$  é igual ao sinal de  $\operatorname{sen} x$  (2).

De (1) e (2) decorre a tese.

Q	sinal de $\operatorname{cosec} x$	sinal de $\operatorname{sen} x$
1º	+	+
2º	+	+
3º	-	-
4º	-	-

b) Se  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , temos:

$$\operatorname{cosec} x = 1 = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad (k \text{ par})$$

ou

$$\operatorname{cosec} x = -1 = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad (k \text{ ímpar})$$

#### 41. Corolário

Para todo  $x$  real,  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ , valem as relações:

$$\begin{aligned}\cotg x &= \frac{1}{\tg x} \\ \tg^2 x + 1 &= \sec^2 x \\ 1 + \cotg^2 x &= \operatorname{cosec}^2 x \\ \cos^2 x &= \frac{1}{1 + \tg^2 x} \\ \sen^2 x &= \frac{\tg^2 x}{1 + \tg^2 x}\end{aligned}$$

#### Demonstração

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sen x} = \frac{1}{\frac{\sen x}{\cos x}} = \frac{1}{\tg x}$$

$$\tg^2 x + 1 = \frac{\sen^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\sen^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$1 + \cotg^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sen^2 x} = \frac{\sen^2 x + \cos^2 x}{\sen^2 x} = \frac{1}{\sen^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + \tg^2 x}$$

$$\sen^2 x = \cos^2 x \cdot \frac{\sen^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x \cdot \tg^2 x = \frac{1}{1 + \tg^2 x} \cdot \tg^2 x = \frac{\tg^2 x}{1 + \tg^2 x}$$

#### EXERCÍCIOS

C.73 Sabendo que  $\sen x = \frac{4}{5}$  e  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , calcular as demais funções circulares de  $x$ .

#### Solução

Notando que  $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$ , temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \sen^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\tg x = \frac{\sen x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sen x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sen x} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

C.74 Sabendo que  $\operatorname{cosec} x = -\frac{25}{24}$  e  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , calcular as demais funções circulares de  $x$ .

C.75 Sabendo que  $\tg x = \frac{12}{5}$  e  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , calcular as demais funções circulares de  $x$ .

#### Solução

$$\cotg x = \frac{1}{\tg x} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}$$

Notando que  $\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sec x < 0$ , temos:

$$\sec x = -\sqrt{1 + \tg^2 x} = -\sqrt{1 + \frac{144}{25}} = -\sqrt{\frac{169}{25}} = -\frac{13}{5}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{-\frac{13}{5}} = -\frac{5}{13}$$

$$\sen x = \tg x \cdot \cos x = \left(\frac{12}{5}\right) \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sen x} = \frac{1}{-\frac{12}{13}} = -\frac{13}{12}$$

C.76 Calcular  $\cos x$  sabendo que  $\cotg x = \frac{2\sqrt{m}}{m-1}$  com  $m > 1$ .

C.77 Calcular  $\sec x$  sabendo que  $\sen x = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$  com  $a > b > 0$ .



**C.78** Sabendo que  $\sec x = 3$ , calcular o valor da expressão  $y = \sin^2 x + 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x$ .

**Solução**

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{3}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 = 9 - 1 = 8$$

então

$$y = \sin^2 x + 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x = \frac{8}{9} + 16 = \frac{152}{9}$$

**C.79** Sendo  $\sin x = \frac{1}{3}$  e  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , calcular o valor de

$$y = \frac{1}{\operatorname{cosec} x + \cotg x} + \frac{1}{\operatorname{cosec} x - \cotg x}$$

**C.80** Sabendo que  $\cotg x = \frac{24}{7}$  e  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , calcular o valor da expressão

$$y = \frac{\operatorname{tg} x \cdot \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$$

**Solução 1**

Calculamos  $\operatorname{tg} x$ ,  $\cos x$  e finalmente  $y$ :

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cotg x} = \frac{7}{24}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{49}{576}} = \frac{576}{625} \Rightarrow \cos x = -\frac{24}{25}$$

$$y = \frac{\operatorname{tg} x \cdot \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{\left(\frac{7}{24}\right)\left(-\frac{24}{25}\right)}{\left(1 - \frac{24}{25}\right)\left(1 + \frac{24}{25}\right)} = \frac{-\frac{7}{25}}{\frac{49}{625}} = -\frac{25}{7}$$

**Solução 2**

Simplificamos  $y$  e depois calculamos o que for necessário:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x = \\ &= -\sqrt{1 + \cotg^2 x} = -\sqrt{1 + \frac{576}{49}} = -\frac{25}{7} \end{aligned}$$

**C.81** Dado que  $\cos x = \frac{2}{5}$  e  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ , obter o valor de

$$y = (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 + (1 - \operatorname{tg}^2 x)^2$$

**C.82** Calcular  $\sin x$  e  $\cos x$  sabendo que  $3 \cdot \cos x + \sin x = -1$ .

**Solução**

Vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \textcircled{1} 3 \cdot \cos x + \sin x = -1 \\ \textcircled{2} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

De  $\textcircled{1}$  vem:  $\sin x = -1 - 3 \cdot \cos x$   $\textcircled{1}$

Substituindo  $\textcircled{1}$  em  $\textcircled{2}$  resulta:

$$\cos^2 x + (-1 - 3 \cdot \cos x)^2 = 1$$

isto é

$$\cos^2 x + 1 + 6 \cdot \cos x + 9 \cdot \cos^2 x = 1$$

ou ainda

$$10 \cdot \cos^2 x + 6 \cdot \cos x = 0 \text{ então } \cos x = 0 \text{ ou } \cos x = -\frac{3}{5}$$

Substituindo cada uma dessas alternativas em  $\textcircled{1}$ , encontramos:

$$\sin x = -1 - 3 \cdot 0 = -1 \text{ ou } \sin x = -1 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

Assim, temos duas soluções:

$$1^a) \cos x = 0 \text{ e } \sin x = -1$$

ou

$$2^a) \cos x = -\frac{3}{5} \text{ e } \sin x = \frac{4}{5}$$

**C.83** Calcular  $\sin x$  e  $\cos x$  sabendo que  $5 \cdot \sec x - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x = 1$ .

**C.84** Obter  $\operatorname{tg} x$  sabendo que  $\sin^2 x - 5 \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 3$ .

**C.85** Calcular  $m$  de modo que se tenha  $\sin x = 2m + 1$  e  $\cos x = 4m + 1$ .

**Solução**

Como  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , resulta:

$$(2m + 1)^2 + (4m + 1)^2 = 1 \Rightarrow (4m^2 + 4m + 1) + (16m^2 + 8m + 1) = 1$$

$$\Rightarrow 20m^2 + 12m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{40}$$

$$= \frac{-12 \pm 8}{40} \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \text{ ou } m = -\frac{1}{10}$$

C.86 Calcular  $m$  de modo que se tenha  $\operatorname{tg} x = m - 2$  e  $\operatorname{cotg} x = \frac{m}{3}$ .

C.87 Determinar  $a$  de modo que se tenha  $\cos x = \frac{1}{a+1}$  e  $\operatorname{cosec} x = \frac{a+1}{\sqrt{a+2}}$ .

C.88 Determinar uma relação entre  $x$  e  $y$ , independente de  $t$ , sabendo que  
 $x = 3 \cdot \operatorname{sen} t$  e  $y = 4 \cdot \cos t$ .

**Solução**

Como  $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$ , resulta:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \implies \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \implies 16x^2 + 9y^2 = 144$$

C.89 Determinar uma relação entre  $x$  e  $y$ , independente de  $t$ , sabendo que  
 $x = 5 \cdot \operatorname{tg} t$  e  $y = 3 \cdot \operatorname{cosec} t$ .

**Solução**

Como  $\operatorname{cosec}^2 t = \operatorname{cotg}^2 t + 1$  e  $\operatorname{cotg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t}$ , resulta:

$$\left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{x}\right)^2 + 1 \implies \frac{y^2}{9} = \frac{25}{x^2} + 1 \implies x^2 y^2 = 225 + 9x^2 \implies x^2 y^2 - 9x^2 = 225.$$

C.90 Se  $\operatorname{sen} x + \cos x = a$  e  $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = b$ , obter uma relação entre  $a$  e  $b$ , independente de  $x$ .

C.91 Dado que  $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = m$ , calcular o valor de  $y = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$  e  $z = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$ .

**Solução**

Como  $a^2 + b^2 \equiv (a + b)^2 - 2ab$ , temos:

$$y = (\operatorname{sen}^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = 1^2 - 2 \cdot (\operatorname{sen} x \cdot \cos x)^2 = 1 - 2m^2.$$

Como  $a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ , temos:

$$z = (\operatorname{sen}^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)(\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x - \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = y - (\operatorname{sen} x \cdot \cos x)^2 = 1 - 2m^2 - m^2 = 1 - 3m^2.$$

C.92 Sabendo que  $\operatorname{sen} x + \cos x = a$  (a dado), calcular  $y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$ .

### III. IDENTIDADES

#### 42. Definição

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de domínios  $D_1$  e  $D_2$ , respectivamente. Dizemos que  $f$  é idêntica a  $g$ , e indicamos  $f \equiv g$ , se, e somente se,  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$  em que ambas as funções estão definidas. Colocando em símbolos:

$$f \equiv g \iff f(x) = g(x), \forall x \in D_1 \cap D_2$$

#### 43. Exemplos

1º)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$  e  
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = 4x$  são idênticas pois:  
 $f(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4x = g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

2º)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x + 1$  e  
 $g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  são idênticas pois:  
 $g(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1 = f(x), \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

3º)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$  e  
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = 1 - \cos^2 x$  são idênticas pois:  
 $f(x) = \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

4º)  $f: \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x$  e  
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = 1$  são idênticas pois:  
 $f(x) = \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = (1 + \operatorname{tg}^2 x) - \operatorname{tg}^2 x = 1 = g(x)$  para todo  
 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

#### IV. DEMONSTRAÇÃO DE IDENTIDADE

44. Para demonstrarmos uma identidade trigonométrica podemos aplicar qualquer uma das fórmulas (que são também identidades) estabelecidas na teoria, a saber: as relações fundamentais, as fórmulas de redução, as de adição, as de multiplicação, as de divisão e as de transformação em produto. É evidente que na série de exercícios seguinte só podemos usar as relações fundamentais.

45. Existem basicamente três processos para provar uma identidade. Conforme a dificuldade da demonstração escolhemos o método mais adequado entre os seguintes:

1º) partimos de um dos membros (geralmente o mais complicado) da identidade e o transformamos no outro.

2º) transformamos o 1º membro (f) e, separadamente, o 2º membro (g), chegando com ambos na mesma expressão (h). A validade deste método é justificada pela propriedade:

$$\left. \begin{array}{l} f \equiv h \\ g \equiv h \end{array} \right\} \Rightarrow f \equiv g$$

3º) construímos a função  $h = f - g$  e provamos que  $h \equiv 0$ . A validade deste método é justificada pela propriedade:

$$f - g \equiv 0 \iff f \equiv g$$

#### EXERCÍCIOS

C.93 Provar que  $(1 + \cotg^2 x)(1 - \cos^2 x) = 1$  para todo  $x$  real,  $x \neq k\pi$ .

**Solução**

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + \cotg^2 x)(1 - \cos^2 x) = \left(1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) \cdot \sin^2 x = \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \sin^2 x = 1 = g(x). \end{aligned}$$

C.94 Provar que  $2 \cdot \sec x \cdot \tg x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x - 1} + \frac{1}{\operatorname{cosec} x + 1}$  para todo  $x$  real

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

**Solução**

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\operatorname{cosec} x - 1} + \frac{1}{\operatorname{cosec} x + 1} = \frac{(\operatorname{cosec} x + 1) + (\operatorname{cosec} x - 1)}{(\operatorname{cosec} x - 1)(\operatorname{cosec} x + 1)} = \\ &= \frac{2 \cdot \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec}^2 x - 1} = \frac{2 \cdot \operatorname{cosec} x}{\cotg^2 x} = \frac{2}{\sin x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \cdot \sec x \cdot \tg x = f(x). \end{aligned}$$

C.95 Provar que  $(1 - \tg x)^2 + (1 - \cotg x)^2 = (\sec x - \operatorname{cosec} x)^2$  para todo  $x$  real,  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ .

**Solução**

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - \tg x)^2 + (1 - \cotg x)^2 = \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + \left(1 - \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}\right)^2 + \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x}\right)^2 = \frac{1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + \\ &+ \frac{1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = (1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x) \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) = \\ &= \frac{1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = h(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= (\sec x - \operatorname{cosec} x)^2 = \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x \cdot \sin x}\right)^2 = \frac{1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = h(x) \end{aligned}$$

C.96 Provar que  $\frac{1 - \cos x}{\sin x \cdot \cos x} + \sin x = \frac{1 - \cos x}{\tg x} + \tg x$  para todo  $x$  real,  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ .

**Solução**

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{1 - \cos x}{\sin x \cdot \cos x} + \sin x - \frac{1 - \cos x}{\tg x} - \tg x = \\ &= \frac{1 - \cos x}{\sin x \cdot \cos x} + \sin x - \frac{\cos x (1 - \cos x)}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \\ &= \frac{1 - \cos x + \sin^2 x + \cos x - \cos^2 x + (1 - \cos x) - \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \\ &= \frac{1 - \cos x + (1 - \cos^2 x) + \cos x - \cos^2 x (1 - \cos x) - (1 - \cos^2 x)}{\sin x \cdot \cos x} = \\ &= \frac{1 - \cos x + \cos x - \cos^3 x - \cos^2 x + \cos^3 x - 1 + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = 0 \end{aligned}$$

Demonstrar as identidades seguintes:

C.97  $\cos^4 x + \sin^4 x + 2 \cdot (\sin x \cdot \cos x)^2 = 1$

C.98  $\frac{\sin x}{\operatorname{cosec} x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1$

$$C.99 \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sec x \cdot \operatorname{cosec} x$$

$$C.100 \quad (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) (\sec x - \cos x) (\operatorname{cosec} x - \operatorname{sen} x) = 1$$

$$C.101 \quad \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x$$

$$C.102 \quad \frac{\operatorname{cotg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \cos^2 x$$

$$C.103 \quad \frac{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}{\operatorname{sen} x - \cos x} = 1 + \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$C.104 \quad \operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x + \operatorname{cotg}^2 x$$

$$C.105 \quad 2(\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x)(\cos x + \operatorname{cotg} x) = (1 + \operatorname{sen} x + \cos x)^2$$

$$C.106 \quad (1 + \operatorname{cotg} x) + (1 - \operatorname{cotg} x)^2 = 2 \cdot \operatorname{cosec}^2 x.$$

$$C.107 \quad \frac{1 - 2 \cdot \cos^2 x + \cos^4 x}{1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x} = \operatorname{tg}^4 x$$

$$C.108 \quad (\operatorname{cotg} x - \cos x)^2 + (1 - \operatorname{sen} x)^2 = (1 - \operatorname{cosec} x)^2$$

$$C.109 \quad \frac{\cos x + \cos y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y} = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\cos y - \cos x}$$

$$C.110 \quad \frac{\cos x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{tg} x + \sec x} = \cos x \cdot \operatorname{cotg} x$$

$$C.111 \quad \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} + 1 = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 y$$

$$C.112 \quad \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = (\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x)^2$$

$$C.113 \quad \frac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y$$

$$C.114 \quad (\sec x \cdot \sec y + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y)^2 = 1 + (\sec x \cdot \operatorname{tg} y + \sec y \cdot \operatorname{tg} x)^2$$

$$C.115 \quad \sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sec x + \operatorname{tg} x}$$

$$C.116 \quad \operatorname{cosec}^6 x - \operatorname{cotg}^6 x = 1 + 3 \cdot \operatorname{cotg}^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x.$$

## CAPÍTULO IV

# REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas de  $x$ , com  $x$  não pertencente ao 1º quadrante, relacionando  $x$  com algum elemento do 1º quadrante. A meta é ficar conhecendo  $\operatorname{sen} x$ ,  $\cos x$  e  $\operatorname{tg} x$  a partir de uma tabela que dê as funções circulares dos reais entre 0 e  $\frac{\pi}{2}$ .

## I. REDUÇÃO DO 2º AO 1º QUADRANTE

46. Dado o número real  $x$  tal que  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , seja  $P$  a imagem de  $x$  no ciclo. Seja  $P'$  o ponto do ciclo, simétrico de  $P$  em relação ao eixo dos senos. Temos:

$$\widehat{AP} + \widehat{PA'} = \pi \quad (\text{no sentido anti-horário})$$

e, como  $\widehat{AP'} = \widehat{PA'}$ , vem:

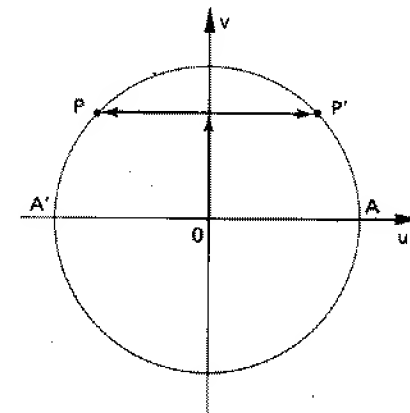
$$\widehat{AP} + \widehat{AP'} = \pi$$

portanto  $\widehat{AP'} = \pi - x$ .

É imediato que:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} (\pi - x)$$

$$\cos x = -\cos (\pi - x)$$



47. Levando em conta as relações fundamentais, decorre:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen}(\pi - x)}{-\cos(\pi - x)} = -\operatorname{tg}(\pi - x)$$

$$\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(\pi - x)$$

$$\sec x = -\sec(\pi - x)$$

$$\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec}(\pi - x)$$

48. Assim, por exemplo, temos:

$$\operatorname{sen} 115^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ - 115^\circ) = \operatorname{sen} 65^\circ$$

$$\cos 130^\circ = -\cos(180^\circ - 130^\circ) = -\cos 50^\circ$$

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{4\pi}{5} = -\operatorname{cotg}\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -\operatorname{cotg} \frac{\pi}{5}$$

## II. REDUÇÃO DO 3º AO 1º QUADRANTE

49. Dado o número real  $x$  tal que  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , seja  $P$  a imagem de  $x$  no ciclo. Seja  $P'$  o ponto do ciclo, simétrico de  $P$  em relação ao centro. Temos:

$$\widehat{AP} - \widehat{AP'} = \pi \quad (\text{no sentido anti-horário})$$

$$\text{portanto } \widehat{AP'} = x - \pi.$$

É imediato que:

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(x - \pi)$$

$$\cos x = -\cos(x - \pi)$$

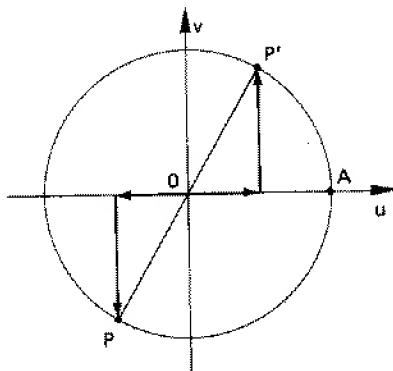
50. Em consequência temos:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{-\operatorname{sen}(x - \pi)}{-\cos(x - \pi)} = \operatorname{tg}(x - \pi)$$

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(x - \pi)$$

$$\sec x = -\sec(x - \pi)$$

$$\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec}(x - \pi)$$



51. Assim, por exemplo, temos:

$$\operatorname{sen} 210^\circ = -\operatorname{sen}(210^\circ - 180^\circ) = -\operatorname{sen} 30^\circ$$

$$\cos 225^\circ = -\cos(225^\circ - 180^\circ) = -\cos 45^\circ$$

$$\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$$

$$\sec \frac{7\pi}{6} = -\sec\left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) = -\sec \frac{\pi}{6}$$

## III. REDUÇÃO DO 4º AO 1º QUADRANTE

52. Dado o número real  $x$  tal que  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ , seja  $P$  a imagem de  $x$  no ciclo. Seja  $P'$  o ponto do ciclo, simétrico de  $P$  em relação ao eixo dos cosenos. Temos:

$\widehat{AP} + \widehat{PA} = 2\pi$  (no sentido anti-horário)  
e, como  $\widehat{AP'} = \widehat{PA}$ , em:

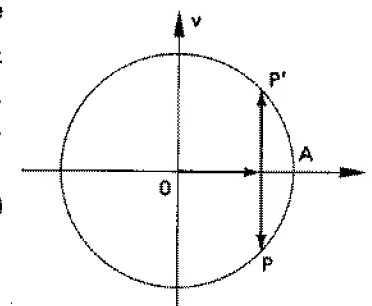
$$\widehat{AP} + \widehat{AP'} = 2\pi$$

$$\text{portanto } \widehat{AP'} = 2\pi - x.$$

É imediato que:

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x)$$

$$\cos x = \cos(2\pi - x)$$



53. Em consequência temos:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{-\operatorname{sen}(2\pi - x)}{\cos(2\pi - x)} = -\operatorname{tg}(2\pi - x)$$

$$\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(2\pi - x)$$

$$\sec x = \sec(2\pi - x)$$

$$\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec}(2\pi - x)$$

54. Assim, por exemplo, temos:

$$\sin 280^\circ = -\sin (360^\circ - 280^\circ) = -\sin 80^\circ$$

$$\cos 340^\circ = \cos (360^\circ - 340^\circ) = \cos 20^\circ$$

$$\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = -\operatorname{tg} (2\pi - \frac{11\pi}{6}) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3} = -\operatorname{cosec} (2\pi - \frac{5\pi}{3}) = -\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3}$$

## EXERCÍCIOS

C.117 Reduzir ao 1º quadrante:

a)  $\cos 178^\circ$

b)  $\sin 251^\circ$

c)  $\operatorname{tg} 290^\circ$

d)  $\cotg \frac{7\pi}{6}$

e)  $\sec 1924^\circ$

f)  $\operatorname{cosec} \frac{23\pi}{6}$

g)  $\sin (-\frac{7\pi}{6})$

h)  $\cos (-\frac{5\pi}{3})$

i)  $\operatorname{tg} (-\frac{3\pi}{4})$

j)  $\sin \frac{21\pi}{4}$

k)  $\cos \frac{31\pi}{6}$

l)  $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{3}$

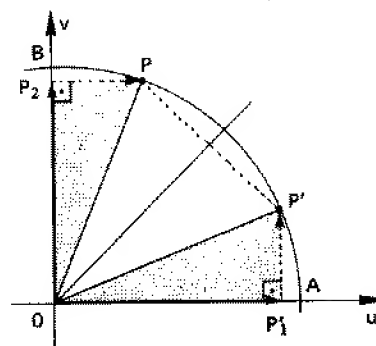
## IV. REDUÇÃO DE $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ A $[0, \frac{\pi}{4}]$

55. Dado o número real  $x$  tal que  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ , seja  $P$  a imagem de  $x$  no ciclo. Seja  $P'$  o ponto do ciclo simétrico de  $P$  em relação à bissetriz do 1º quadrante. Temos:

$$\widehat{AP} + \widehat{P8} = \frac{\pi}{2} \text{ (no sentido anti-horário)}$$

e, como  $\widehat{P8} = \widehat{AP'}$ , vem:

$$\widehat{AP} + \widehat{AP'} = \frac{\pi}{2}, \text{ então } \widehat{AP'} = \frac{\pi}{2} - x.$$



Considerando a congruência dos triângulos  $OPP_2$  e  $OP'P_1$ , temos:

$$\overline{OP_2} = \overline{OP_1} \implies \sin x = \cos (\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\overline{P_2P} = \overline{P_1P'} \implies \cos x = \sin (\frac{\pi}{2} - x)$$

56. Em consequência, temos:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos (\frac{\pi}{2} - x)}{\sin (\frac{\pi}{2} - x)} = \cotg (\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\cotg x = \operatorname{tg} (\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\sec x = \operatorname{cosec} (\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\operatorname{cosec} x = \sec (\frac{\pi}{2} - x)$$

57. Assim, por exemplo, temos:

$$\sin 71^\circ = \cos (90^\circ - 71^\circ) = \cos 19^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \sin (90^\circ - 60^\circ) = \sin 30^\circ$$

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \cotg (90^\circ - 60^\circ) = \cotg 40^\circ$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \cos (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \sin (\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}) = \sin \frac{\pi}{12}$$

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} = \cotg (\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}) = \cotg \frac{\pi}{8}$$

## EXERCÍCIO

C.118 Reduzir ao intervalo  $[0, \frac{\pi}{4}]$ :

a)  $\sin 261^\circ$

b)  $\cos 2861^\circ$

c)  $\operatorname{tg} 511^\circ$

d)  $\sin \frac{4\pi}{3}$

e)  $\cos \frac{2\pi}{3}$

f)  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$

g)  $\sin \frac{5\pi}{6}$

h)  $\cos \frac{7\pi}{6}$

i)  $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$

j)  $\sin (-\frac{5\pi}{3})$

k)  $\cos (-\frac{4\pi}{3})$

l)  $\operatorname{tg} (-\frac{11\pi}{3})$

## V. IDENTIDADES

Ao procurar resolver problemas de redução ao 1.<sup>o</sup> quadrante estabelecemos igualdades notáveis. Por exemplo, mostramos que se  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  então  $\sin x = \sin(\pi - x)$  e  $\cos x = -\cos(\pi - x)$ . Vamos agora estender essas igualdades para todo  $x$  real.

### 58. Teorema

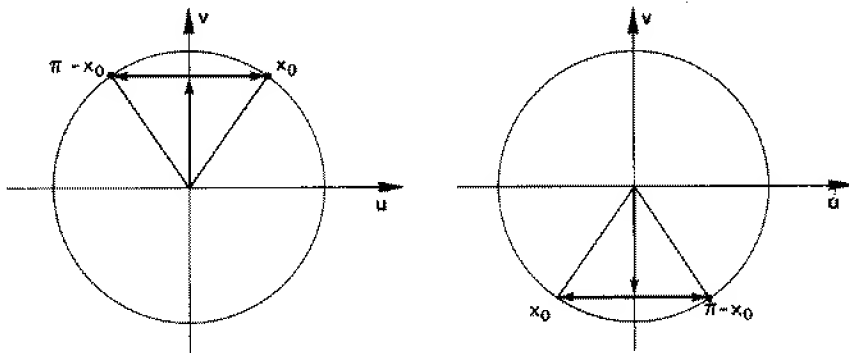
Para todo  $x$  real valem as seguintes igualdades:

$$1) \sin x = \sin(\pi - x) \quad \text{e} \quad \cos x = -\cos(\pi - x)$$

$$2) \sin x = -\sin(x - \pi) \quad \text{e} \quad \cos x = -\cos(x - \pi)$$

$$3) \sin x = -\sin(2\pi - x) \quad \text{e} \quad \cos x = \cos(2\pi - x)$$

$$4) \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{e} \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$



#### Demonstração

1) Para todo  $x \in \mathbb{R}$  temos  $x = x_0 + 2k\pi$  onde  $0 \leq x_0 < 2\pi$  e  $k \in \mathbb{Z}$ . Assim,  $\pi - x = (\pi - x_0) - 2k\pi$  o que mostra que  $x$  e  $\pi - x$  têm imagens no ciclo simétricas em relação ao eixo dos senos.

Em consequência temos:

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2), 3) e 4) provam-se analogamente.

## EXERCÍCIOS

C.119 Simplificar as seguintes expressões:

$$a) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$b) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$c) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$d) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$e) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

$$f) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

#### Solução

$$a) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$b) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

$$c) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin\left[\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \pi\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

$$d) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos\left[\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \pi\right] = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

$$e) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sin\left[2\pi - \left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

$$f) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos\left[2\pi - \left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$C.120 \text{ Simplificar } y = \frac{\sin(2\pi - x) \cdot \cos(\pi - x)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$$

#### Solução

$$y = \frac{(-\sin x)(-\cos x)}{(-\operatorname{cotg} x)(\operatorname{tg} x)} = -\sin x \cdot \cos x$$

C.121 Simplificar as expressões:

$$a) \frac{\sin(-x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\operatorname{tg}(2\pi - x) \cdot \cos(\pi - x)}$$

$$b) \frac{\sin(180^\circ - x) \cdot \operatorname{tg}(90^\circ + x)}{\operatorname{cotg}(270^\circ + x) \cdot \cos(270^\circ - x)}$$

$$c) \frac{\sec(\pi - x) \cdot \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{cosec}(9\pi - x) \cdot \operatorname{cotg}(-x)}$$

$$d) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(4\pi - x) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

C.122 (MAPOFEI-76) Simplificar a expressão:

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right) + \sin(7\pi - x).$$

C.123 (MAPOFEI-74) Simplificar a expressão:

$$\sin \frac{7\pi}{2} + \frac{\sin(x + 11\pi) \cotg(x + \frac{11\pi}{2})}{\cos(9\pi - x)}$$

C.124 (MAPOFEI-74) Simplificar a expressão:

$$\frac{a^2 \cos 180^\circ - (a - b)^2 \sin 270^\circ + 2ab \cos 0^\circ}{b^2 \sin 90^\circ}$$

C.125 (MAPOFEI-76) Fazer o gráfico da função  $y = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 2$ .

## VI. FUNÇÕES PARES E FUNÇÕES ÍMPARES

### 59. Definição

Uma função  $f: A \rightarrow B$ , é denominada *função par* se, e somente se:

$$f(x) = f(-x), \quad \forall x \in A$$

isto é, dando valores simétricos à variável, obtemos o mesmo valor para a função.

Exemplos

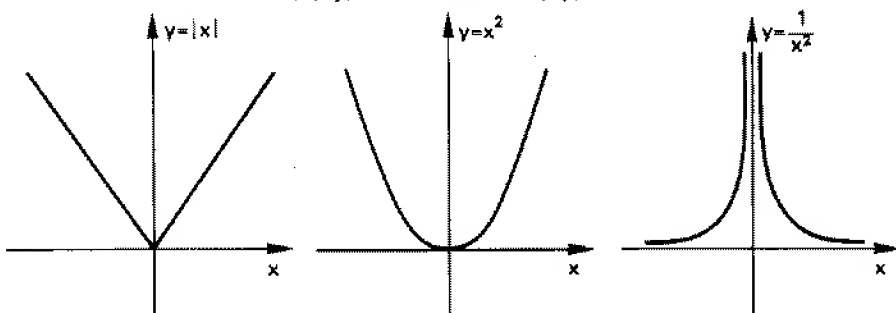
1º)  $f(x) = |x|$  é função par pois  $|-x| = |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2º)  $f(x) = x^2$  é função par pois  $(-x)^2 = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3º)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  é função par pois  $\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

Da definição decorre que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo  $y$  pois:

$$(x, y) \in f \implies (-x, y) \in f$$



### 60. Definição

Uma função  $f: A \rightarrow B$ , é denominada *função ímpar* se, e somente se:

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in A$$

isto é, dando valores simétricos à variável, obtemos valores simétricos para a função.

Exemplos

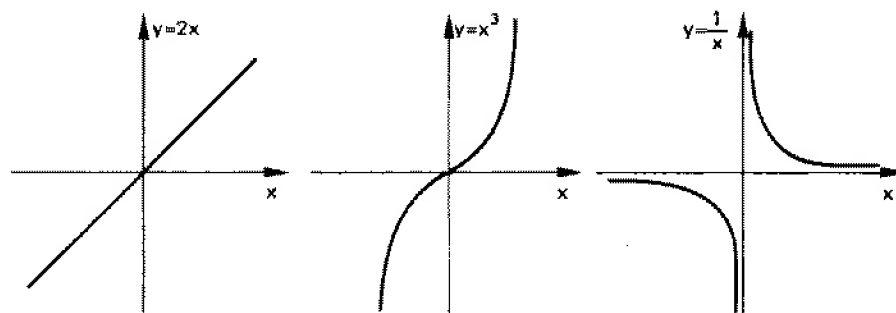
1º)  $f(x) = 2x$  é função ímpar pois  $2(-x) = -2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2º)  $f(x) = x^3$  é função ímpar pois  $(-x)^3 = -x^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3º)  $f(x) = \frac{1}{x}$  é função ímpar pois  $\frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

Da definição decorre que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano pois:

$$(x, y) \in f \implies (-x, -y) \in f$$



61. Os números  $x$  e  $-x$  têm, no ciclo, imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos. Em consequência, temos:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

portanto, de acordo com as definições dadas, a função seno é função ímpar e a função cosseno é função par.



Graus	Radianos	Seno	Tangente	Cotang.	Co-seno		
0°	0,0000	0,0000	0,0000		1,0000	1,5708	90°
1°	0,0175	0,0175	0,0175	57,290	0,9998	1,5533	89°
2°	0,0349	0,0349	0,0349	28,636	0,9994	1,5359	88°
3°	0,0524	0,0523	0,0524	19,081	0,9986	1,5184	87°
4°	0,0698	0,0698	0,0699	14,301	0,9976	1,5010	86°
5°	0,0873	0,0872	0,0875	11,430	0,9962	1,4835	85°
6°	0,1047	0,1045	0,1051	9,5144	0,9945	1,4661	84°
7°	0,1222	0,1219	0,1228	8,1443	0,9925	1,4488	83°
8°	0,1396	0,1392	0,1405	7,1154	0,9903	1,4312	82°
9°	0,1571	0,1584	0,1584	6,3138	0,9877	1,4137	81°
10°	0,1745	0,1736	0,1763	5,6713	0,9848	1,3963	80°
11°	0,1920	0,1908	0,1944	5,1446	0,9816	1,3788	79°
12°	0,2094	0,2079	0,2128	4,7046	0,9781	1,3814	78°
13°	0,2269	0,2250	0,2309	4,3315	0,9744	1,3439	77°
14°	0,2443	0,2419	0,2493	4,0108	0,9703	1,3265	76°
15°	0,2618	0,2588	0,2679	3,7321	0,9679	1,3090	75°
16°	0,2793	0,2756	0,2867	3,4874	0,9613	1,2915	74°
17°	0,2967	0,2924	0,3057	3,2709	0,9583	1,2741	73°
18°	0,3142	0,3090	0,3299	3,0777	0,9515	1,2566	72°
19°	0,3316	0,3256	0,3443	2,9042	0,9455	1,2392	71°
20°	0,3491	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397	1,2217	70°
21°	0,3665	0,3584	0,3839	2,6051	0,9336	1,2043	89°
22°	0,3840	0,3746	0,4040	2,4751	0,9272	1,1868	68°
23°	0,4014	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205	1,1694	67°
24°	0,4189	0,4067	0,4452	2,2460	0,9135	1,1519	66°
25°	0,4363	0,4226	0,4663	2,1445	0,9063	1,1345	65°
26°	0,4538	0,4384	0,4877	2,0503	0,8988	1,1170	64°
27°	0,4712	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	1,0996	63°
28°	0,4887	0,4695	0,5317	1,8807	0,8829	1,0821	62°
29°	0,5061	0,4648	0,5543	1,8040	0,8746	1,0647	61°
30°	0,5236	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	1,0472	60°
31°	0,5411	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	1,0297	59°
32°	0,5585	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	1,0123	58°
33°	0,5760	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	0,9948	57°
34°	0,5934	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	0,9774	56°
35°	0,6109	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	0,9599	55°
36°	0,6283	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	0,9425	54°
37°	0,6458	0,6018	0,7538	1,3270	0,7986	0,9250	53°
38°	0,6532	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	0,9076	52°
39°	0,6807	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	0,8901	51°
40°	0,6981	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	0,8727	50°
41°	0,7158	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	0,8552	49°
42°	0,7330	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	0,8378	48°
43°	0,7505	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	0,8203	47°
44°	0,7679	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	0,8029	46°
45°	0,7854	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	0,7854	45°
		Co-seno	Cotang.	Tangente	Seno	Radianos	Graus

# ARCOS NOTÁVEIS

Verificaremos no que segue que as funções circulares dos reais  $x = \frac{\pi}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 3$ , podem ser calculadas a partir de  $\ell_n$ , lado do polígono regular de  $n$  lados inscrito no círculo.

## I. TEOREMA

Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 3$ , vale a relação

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\ell_n}{2}$$

*Demonstração*

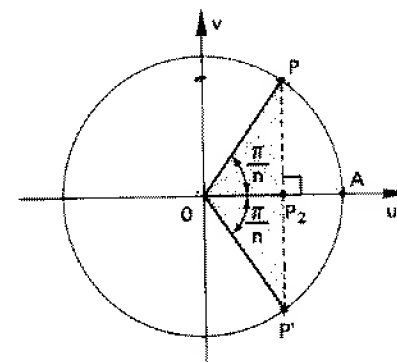
Seja  $\widehat{AOP} = \widehat{AOP'} = \frac{\pi}{n}$ .

Como  $\widehat{P'OP} = \frac{2\pi}{n}$ , decorre que

$$P'P = \ell_n.$$

No triângulo isósceles  $P'OP$  o eixo dos cossenos é bissetriz e também altura e mediana, isto é,  $P'P \perp u$  e  $P_2$  é ponto médio de  $P'P$ . Então

$$\sin \frac{\pi}{n} = \overline{P_2P} = \frac{\ell_n}{2}$$



## II. APLICAÇÕES

Os casos mais comuns de aplicação desta teoria são aqueles em que  $n = 3, 4$  e  $6$ .

### 62. Valores das funções em $\frac{\pi}{3}$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo assinalado na figura:

$$\ell_3^2 + \ell_6^2 = (2R)^2$$

$$\ell_3^2 + R^2 = 4R^2$$

$$\ell_3^2 = 3R^2$$

$$\ell_3 = R\sqrt{3}$$

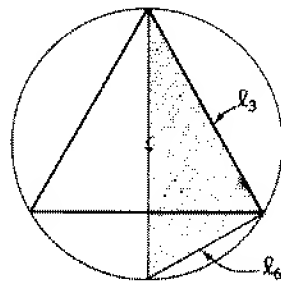
Notando que o raio do ciclo é  $R = 1$ , temos:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\ell_3}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Em consequência, vem:

$$\cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{3}} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$



### 63. Valores das funções em $\frac{\pi}{4}$

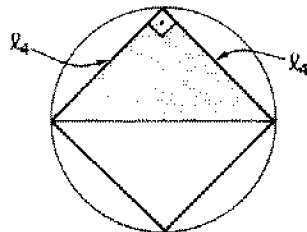
Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo assinalado na figura:

$$\ell_4^2 + \ell_4^2 = (2R)^2$$

$$2\ell_4^2 = 4R^2$$

$$\ell_4^2 = 2R^2$$

$$\ell_4 = R\sqrt{2}$$



Temos, então:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\ell_4}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Em consequência, vem:

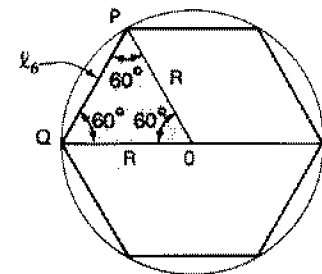
$$\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

### 64. Valores das funções em $\frac{\pi}{6}$

Sendo  $PQ = \ell_6$  o lado do hexágono regular inscrito, o triângulo  $OPQ$  é equilátero e, então:

$$\ell_6 = R$$



Temos, então:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{\ell_6}{2} = \frac{R}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{6}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

65. Concluindo, podemos sintetizar esses resultados na seguintes tabela:

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

## EXERCÍCIOS

C.126 Calcular  $\sin 15^\circ$ ,  $\cos 15^\circ$  e  $\operatorname{tg} 15^\circ$ .

**Solução**

$$\sin 15^\circ = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\ell_{12}}{2}$$

Calculemos  $\ell_{12}$  no triângulo PQR:

$$PQ = \ell_{12}, \quad QR = \frac{\ell_6}{2} = \frac{1}{2}$$

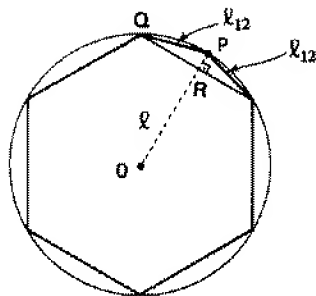
$$RP = OP - OR = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{então } \ell_{12}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\ell_{12}}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$



C.127 Calcular  $\sin \frac{\pi}{8}$ ,  $\cos \frac{\pi}{8}$  e  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ .

C.128 Determinar os elementos do conjunto  $A = \{x = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Solução**

Dando valores a  $k$ , temos:

$$k = 0 \implies x = \operatorname{tg} 0 = 0$$

$$k = 1 \implies x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$k = 2 \implies x = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$k = 3 \implies x = \operatorname{tg} \pi = 0$$

$$k = 4 \implies x = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$k = 5 \implies x = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$k = 6 \implies x = \operatorname{tg} 2\pi = 0 \text{ (repetição) então } A = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}.$$

C.129 Determinar  $A \cap B$  sabendo que:

$$A = \{x = \sin \frac{k\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{e} \quad B = \{x = \cos \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

C.130 (MAPOFEI-74) Calcular todas as funções trigonométricas de um arco de  $930^\circ$ .

## CAPÍTULO VI

# TRANSFORMAÇÕES

## I. FÓRMULAS DE ADIÇÃO

Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas da soma  $(a + b)$  e da diferença  $(a - b)$  de dois números reais quaisquer  $a$  e  $b$ , conhecidas as funções circulares de  $a$  e de  $b$ .

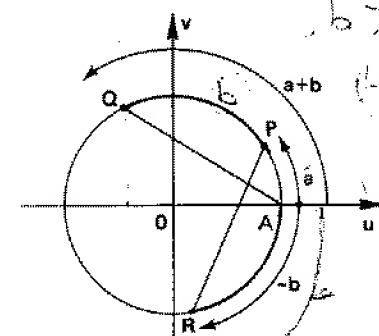
### 66. Cosseno da soma

Sejam P, Q e R os pontos do ciclo associados aos números  $a$ ,  $a + b$  e  $-b$ , respectivamente. Em relação ao sistema cartesiano  $uOv$  as coordenadas desses pontos são:

$$\begin{aligned} P &(\cos a, \sin a) \\ Q &(\cos(a + b), \sin(a + b)) \\ R &(\cos b, -\sin b) \end{aligned}$$

Os arcos  $\widehat{AQ}$  e  $\widehat{RP}$  têm a mesma medida, portanto, as cordas  $AQ$  e  $PR$  são iguais. Aplicando, então, a fórmula da distância entre dois pontos da Geometria Analítica, temos:

$$\begin{aligned} d_{AQ}^2 &= (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2 = \\ &= [\cos(a + b) - 1]^2 + [\sin(a + b) - 0]^2 = \\ &= \cos^2(a + b) - 2 \cdot \cos(a + b) + 1 + \sin^2(a + b) = \\ &= 2 - 2 \cdot \cos(a + b) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 d_{RP}^2 &= (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2 = \\
 &= [\cos a - \cos b]^2 + [\sin a + \sin b]^2 = \\
 &= \cos^2 a - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b + \cos^2 b + \sin^2 a + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b + \\
 &+ \sin^2 b = 2 - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b \\
 d_{AQ} = d_{RP} &\implies 2 - 2 \cdot \cos(a + b) = 2 - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b + \\
 &+ 2 \cdot \sin a \cdot \sin b
 \end{aligned}$$

e, então, vem a fórmula:

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

#### 67. Cosseno da diferença

$$\begin{aligned}
 \cos(a - b) &= \cos[a + (-b)] = \cos a \cdot \cos(-b) - \sin a \cdot \sin(-b) = \\
 &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot (-\sin b)
 \end{aligned}$$

então

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

#### 68. Seno da soma

$$\begin{aligned}
 \sin(a + b) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] = \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin b
 \end{aligned}$$

então

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

#### 69. Seno da diferença

$$\begin{aligned}
 \sin(a - b) &= \sin[a + (-b)] = \sin a \cdot \cos(-b) + \sin(-b) \cdot \cos a = \\
 &= \sin a \cdot \cos b + (-\sin b) \cdot \cos a
 \end{aligned}$$

então

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

#### 70. Tangente da soma

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(a + b) &= \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b} = \\
 &= \frac{\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sin a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}} = \\
 &= \frac{\sin a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sin a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}} = \\
 &= \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sin a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}} = \\
 &= \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\cos a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b} = \\
 &= \frac{\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}
 \end{aligned}$$

então

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Esta fórmula só é aplicável se:

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{e} \quad a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

#### 71. Tangente da diferença

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(a - b) &= \operatorname{tg}[a + (-b)] = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg}(-b)} = \\
 &= \frac{\operatorname{tg} a + (-\operatorname{tg} b)}{1 - \operatorname{tg} a \cdot (-\operatorname{tg} b)} = \\
 &= \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}
 \end{aligned}$$

então

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Esta fórmula só é aplicável se:

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{e} \quad a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

## 72. Cotangente da soma

$$\cotg(a + b) = \frac{\cos(a + b)}{\sin(a + b)} = \frac{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}{\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a} =$$

$$= \frac{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}{\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a} =$$

$$= \frac{\frac{\cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} - \frac{\sin a \cdot \sin b}{\sin a \cdot \sin b}}{\frac{\sin a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} + \frac{\sin b \cdot \cos a}{\sin a \cdot \sin b}} =$$

então

$$\boxed{\cotg(a + b) = \frac{\cotg a \cdot \cotg b - 1}{\cotg a + \cotg b}}$$

Esta fórmula só é aplicável se:

$$a \neq k\pi, \quad b \neq k\pi \quad \text{e} \quad a + b \neq k\pi$$

## 73. Cotangente da diferença

$$\cotg(a - b) = \cotg[a + (-b)] = \frac{\cotg a \cdot \cotg(-b) - 1}{\cotg a + \cotg(-b)} =$$

$$= \frac{\cotg a \cdot (-\cotg b) - 1}{\cotg a + (-\cotg b)}$$

então

$$\boxed{\cotg(a - b) = \frac{\cotg a \cdot \cotg b + 1}{\cotg b - \cotg a}}$$

Esta fórmula só é aplicável se:

$$a \neq k\pi, \quad b \neq k\pi \quad \text{e} \quad a - b \neq k\pi$$

## EXERCÍCIOS

C.131 Calcular os valores de:

- a)  $\cos 15^\circ$       b)  $\sin 105^\circ$       c)  $\tg 75^\circ$       d)  $\sec 285^\circ$

**Solução**

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \tg 75^\circ &= \tg(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tg 45^\circ + \tg 30^\circ}{1 - \tg 45^\circ \cdot \tg 30^\circ} = \\ &= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \sec 285^\circ = \sec 75^\circ = \frac{1}{\cos 75^\circ} = \frac{1}{\cos(45^\circ + 30^\circ)} = \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

C.132 Calcular  $\cotg 165^\circ$ ,  $\sec 255^\circ$  e  $\operatorname{cosec} 15^\circ$ .

C.133 (FEI-76) Sendo  $\tg A = 2$  e  $\tg B = 1$ , ache  $\tg(A - B)$ .

C.134 (MAPOFEI-75) Calcular o valor da expressão  $\sin 105^\circ - \cos 75^\circ$ .

C.135 Dados:  $\sin x = \frac{3}{5}$  e  $\cos y = \frac{5}{13}$ , calcular o  $\cos(x + y)$ , sabendo que  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$ .

**Solução**

$$1^\circ) \cos x = +\sqrt{1 - \sin^2 x} = +\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$2^\circ) \sin y = -\sqrt{1 - \cos^2 y} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$$

$$\begin{aligned} 3^\circ) \cos(x + y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{-12}{13} = \frac{56}{65} \end{aligned}$$

C.136 Sabendo que  $\operatorname{tg} a = \frac{2}{3}$  e  $\operatorname{sen} b = \frac{4}{5}$  com  $\frac{\pi}{2} < b < \pi$ , calcular  $\operatorname{tg}(a+b)$ .

**Solução**

$$1^{\circ}) \cos b = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 b} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$2^{\circ}) \operatorname{tg} b = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$3^{\circ}) \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3} \cdot (-\frac{4}{3})} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{17}{9}} = -\frac{6}{17}$$

C.137 Sabendo que  $\operatorname{sen} x = \frac{15}{17}$ ,  $\operatorname{sen} y = -\frac{3}{5}$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  e  $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$ , calcular  $\operatorname{sen}(x+y)$ ,  $\cos(x+y)$  e  $\operatorname{tg}(x+y)$ .

C.138 Demonstrar as identidades:

a)  $\operatorname{sen}(a+b) \cdot \operatorname{sen}(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a$

b) (EPU SP-62)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} y & \operatorname{sen} z \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(y-z) + \operatorname{sen}(z-x)$$

c)  $\cos^2(a+b) + \cos^2 b - 2 \cdot \cos(a+b) \cdot \cos a \cdot \cos b = \operatorname{sen}^2 a$

**Solução**

a) 1º membro =  $(\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a)(\operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a) =$   
 $= \operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b \cdot \cos^2 a = (1 - \cos^2 a) \cdot \cos^2 b -$   
 $- (1 - \cos^2 b) \cdot \cos^2 a = \cos^2 b - \cos^2 a = 2^{\circ} \text{ membro}$

b) 1º membro =  $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} y & \operatorname{sen} z \\ \cos y & \cos z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} z \\ \cos x & \cos z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} y \\ \cos x & \cos y \end{vmatrix} =$   
 $= \operatorname{sen}(y-z) - \operatorname{sen}(x-z) + \operatorname{sen}(x-y) =$   
 $= \operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(y-z) + \operatorname{sen}(z-x) = 2^{\circ} \text{ membro}$

c) 1º membro =  $(\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b)^2 + \cos^2 b -$   
 $- 2 \cdot (\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) \cdot \cos a \cdot \cos b =$   
 $= \cos^2 a \cdot \cos^2 b - 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b +$   
 $+ \cos^2 b - 2 \cdot \cos^2 a \cdot \cos^2 b + 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos a \cdot \cos b =$   
 $= \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b - \cos^2 a \cdot \cos^2 b + \cos^2 b =$   
 $= \operatorname{sen}^2 a \cdot (1 - \cos^2 b) - (1 - \operatorname{sen}^2 a) \cdot \cos^2 b + \cos^2 b =$   
 $= \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 b - \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 b + \cos^2 b =$   
 $= \operatorname{sen}^2 a = 2^{\circ} \text{ membro}$

C.139 (MAPOFEI-75) Demonstrar a identidade:

$$\operatorname{tg}(45^\circ + x) \cdot \cotg(45^\circ - x) = \frac{-1 + \operatorname{sen} 2x}{1 - \operatorname{sen} 2x}$$

C.140 Se  $a$  e  $b$  são ângulos agudos e positivos, demonstrar que:

$$\operatorname{sen}(a+b) < \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$$

**Solução**

$$\text{Seja } X = \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cdot \cos b +$$

$$+ \operatorname{sen} b \cdot \cos a - \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a (\cos b - 1) + \operatorname{sen} b (\cos a - 1)$$

Temos:

$$0 < a < \frac{\pi}{2} \implies \operatorname{sen} a > 0 \text{ e } \cos a < 1$$

$$0 < b < \frac{\pi}{2} \implies \operatorname{sen} b > 0 \text{ e } \cos b < 1$$

Então

$$\operatorname{sen} a \cdot (\cos b - 1) + \operatorname{sen} b \cdot (\cos a - 1) \implies X < 0$$

$$> 0 \quad < 0 \quad > 0 \quad < 0$$

$$\text{e } X < 0 \implies \operatorname{sen}(a+b) < \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$$

C.141 (EPU SP-63) Provar que se  $\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{2}$  e  $\frac{\pi}{4} < b < \frac{\pi}{2}$ , então

$$\operatorname{sen}(a+b) < \operatorname{sen} a + \frac{4}{5} \cdot \operatorname{sen} b$$

C.142 Provar que os ângulos internos  $A$ ,  $B$  e  $C$  de um triângulo não retângulo verificam a relação:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$$

**Solução**

$$A + B + C = 180^\circ \implies A + B = 180^\circ - C \implies \operatorname{tg}(A+B) = \operatorname{tg}(180^\circ - C) \implies$$

$$\implies \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} = -\operatorname{tg} C \implies \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} C (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B - 1) \implies$$

$$\implies \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$$

C.143 Demonstrar a identidade:  $4 \cdot \operatorname{sen}(x+60^\circ) \cdot \cos(x+30^\circ) = 3 \cdot \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ .

C.144 Estudar a variação das seguintes funções reais:

a)  $f(x) = \operatorname{sen} 2x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x$

b)  $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{sen} x$

c)  $h(x) = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$

### Solução

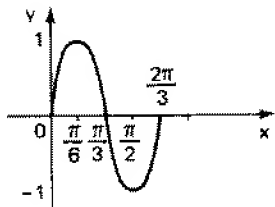
a)  $f(x) = \sin(2x + x) = \sin 3x$

então

$D(f) = \mathbb{R}$

$p = \frac{2\pi}{3}$

$\text{Im}(f) = [-1, 1]$



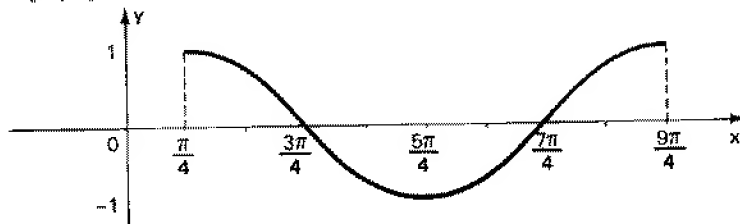
b)  $g(x) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \cos(x - \frac{\pi}{4})$

então

$D(g) = \mathbb{R}$

$p = 2\pi$

$\text{Im}(g) = [-1, 1]$



c)  $h(x) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan x} = \tan(x + \frac{\pi}{4})$

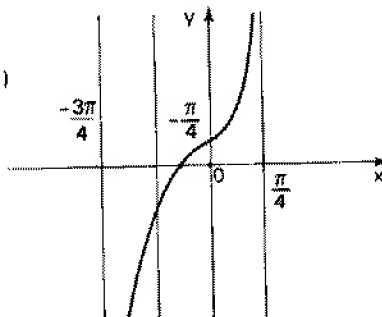
então

$D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi\}$

$p = \pi$

$\text{Im}(h) = \mathbb{R}$

$x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \tan 0 = 0$



C.145 Estudar a variação das seguintes funções reais:

a)  $f(x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

b)  $g(x) = \sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x$

c)  $h(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$

C.146 Qual é o período da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$f(x) = \sin x \cdot \cos 2x + \cos 3x - \sin x \cdot \sin 2x + \sin 3x + \cos x \cdot \sin 2x + \cos 3x + \cos x \cdot \sin 3x + \cos 2x$

## II. FÓRMULAS DE MULTIPLICAÇÃO

Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas de  $2a$ ,  $3a$ ,  $4a$ , etc, conhecidas as funções circulares de  $a$ .

### 74. Funções circulares de $2a$

Façamos  $2a = a + a$  e apliquemos as fórmulas de adição:

i)  $\cos 2a = \cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a$

então

$$\begin{aligned} \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ \cos 2a &= 2 \cdot \cos^2 a - 1 \\ \cos 2a &= 1 - 2 \cdot \sin^2 a \end{aligned}$$

ii)  $\sin 2a = \sin(a + a) = \sin a \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos a$

então

$$\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

iii)  $\tan 2a = \tan(a + a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \cdot \tan a}$

então

$$\tan 2a = \frac{2 \cdot \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

## 75. Funções circulares de 3a

Fazendo  $3a = 2a + a$  e aplicando as fórmulas de adição, temos:

$$\begin{aligned} \text{I) } \cos 3a &= \cos (2a + a) = \cos 2a \cdot \cos a - \sin 2a \cdot \sin a = \\ &= (2 \cdot \cos^2 a - 1) \cos a - (2 \cdot \sin a \cdot \cos a) \sin a = \\ &= (2 \cdot \cos^2 a - 1) \cos a - 2 \sin^2 a \cdot \cos a = \\ &= (2 \cdot \cos^2 a - 1) \cos a - 2 \cdot (1 - \cos^2 a) \cos a \end{aligned}$$

então

$$\cos 3a = 4 \cdot \cos^3 a - 3 \cdot \cos a$$

$$\begin{aligned} \text{II) } \sin 3a &= \sin (2a + a) = \sin 2a \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos 2a = \\ &= (2 \cdot \sin a \cdot \cos a) \cdot \cos a + \sin a (1 - 2 \cdot \sin^2 a) = \\ &= 2 \cdot \sin a \cdot \cos^2 a + \sin a \cdot (1 - 2 \sin^2 a) \end{aligned}$$

então

$$\sin 3a = 3 \cdot \sin a - 4 \cdot \sin^3 a$$

$$\begin{aligned} \text{III) } \operatorname{tg} 3a &= \operatorname{tg} (2a + a) = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a \cdot \operatorname{tg} a} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} + \operatorname{tg} a}{1 - \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \cdot \operatorname{tg} a} = \\ &= \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 a)}{(1 - \operatorname{tg}^2 a) - 2 \cdot \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} a} \end{aligned}$$

então

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 a}$$

## EXERCÍCIOS

**C.147** Sendo  $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$  e  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , calcular  $\sin 2x$ .

**Solução**

$$\sin x = -\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = -\sqrt{\frac{\frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}}} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos x = -\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{9}{16}}} = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

**C.148** (FEI-77) Calcular  $\sin 2x$  sabendo-se que:  $\operatorname{tg} x + \cotg x = 3$ .

**C.149** Sendo  $\cotg x = \frac{12}{5}$  e  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , calcular  $\cos 2x$ .

**Solução**

$$\operatorname{cosec} x = \sqrt{1 + \cotg^2 x} = \sqrt{1 + \frac{144}{25}} = \frac{13}{5} \implies \sin x = \frac{5}{13}$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x = 1 - 2 \cdot \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$$

**C.150** (MAUA-77) Sendo:  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$  com  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

a) calcule  $\sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)$

b) calcule  $\cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

**C.151** Sendo  $\sec x = \frac{25}{24}$  e  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ , calcular  $\operatorname{tg} 2x$ .

**Solução**

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{\sec^2 x - 1} = -\sqrt{\frac{625}{576} - 1} = -\frac{7}{24}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{-\frac{14}{24}}{1 - \frac{49}{576}} = -\frac{336}{527}$$

**C.152** Se  $\cos x = \frac{3}{5}$  e  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ , calcular  $\sin 3x$ .

**C.153** Se  $\sin x = \frac{12}{13}$  e  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , calcular  $\cos 3x$ .



C.154 Se  $\sec x = \frac{4}{3}$  e  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , calcular  $\operatorname{tg} 3x$ .

C.155 (MAPOFEI-75) Calcular  $\sin^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{14\pi}{3}$ .

C.156 Provar que:

a)  $\sin 4a = 4 \cdot \sin a \cdot \cos^3 a - 4 \cdot \sin^3 a \cdot \cos a$

b)  $\cos 4a = 8 \cdot \cos^4 a - 8 \cdot \cos^2 a + 1$

c)  $\operatorname{tg} 4a = \frac{4 \cdot \operatorname{tg} a - 4 \cdot \operatorname{tg}^3 a}{\operatorname{tg}^4 a - 6 \cdot \operatorname{tg}^2 a + 1}$

C.157 Demonstrar pelo princípio da indução finita que:

$$\cos a \cdot \cos 2a \cdot \cos 4a \cdot \dots \cdot \cos 2^{n-1} a = \frac{\sin 2^n a}{2^n \cdot \sin a}$$

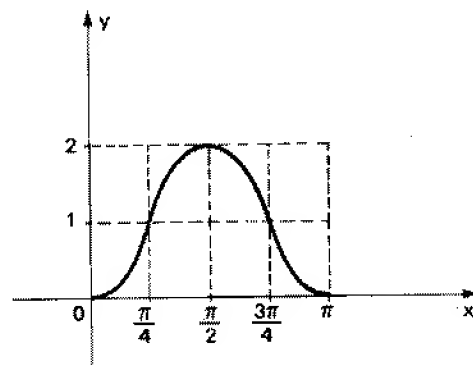
C.158 (POLI-61) Esboçar o gráfico da função  $y = 2 \cdot \sin^2 x$  utilizando o gráfico da  $\cos 2x$ .

**Solução**

A partir da identidade  $\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$ , temos:

$$y = 2 \cdot \sin^2 x \implies y = 1 - \cos 2x$$

x	2x	cos 2x	y
0	0	1	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	-1	2
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	0	1
$\pi$	$2\pi$	1	0



C.159 Estudar a variação das seguintes funções reais:

a)  $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$

b)  $g(x) = 8 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

c)  $h(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$

C.160 Qual é o período das seguintes funções reais?

a)  $f(x) = \sin x + \cos x$

b)  $g(x) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 2x}$

c)  $h(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$

### III. FÓRMULAS DE DIVISÃO

Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas de  $\frac{x}{2}$ , conhecida uma das funções circulares de  $x$ .

76. É dado o  $\cos x$

Sabemos que  $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$  e  $\cos 2a = 1 - 2 \cdot \sin^2 a$ , portanto, fazendo  $2a = x$ , teremos:

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \implies \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\cos x = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \implies \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \implies \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

Os sinais ( $\pm$ ) só têm sentido quando se conhece  $\cos x$ , sem conhecer  $x$ . Assim, sabendo que  $\cos x = \cos x_0$ , temos:

1ª solução:  $x = x_0 + 2k\pi \implies \frac{x}{2} = \frac{x_0}{2} + k\pi$  (I)

2ª solução:  $x = -x_0 + 2k\pi \implies \frac{x}{2} = -\frac{x_0}{2} + k\pi$  (II)

As expressões (I) e (II) nos indicam que, dado  $\cos x$ , existem 4 possíveis arcos  $\frac{x}{2}$ , pois  $k$  pode assumir valores pares ou ímpares, os quais dão origem a dois valores para  $\cos \frac{x}{2}$ ,  $\sin \frac{x}{2}$  e  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Provemos que existem dois valores simétricos para  $\cos \frac{x}{2}$ , por exemplo:

Expr. (I) k par:  $\cos \frac{x}{2} = \cos \left( \frac{x_0}{2} + 2k_1\pi \right) = \cos \frac{x_0}{2}$

Expr. (I) k ímpar:  $\cos \frac{x}{2} = \cos \left[ \frac{x_0}{2} + (2k_1 + 1)\pi \right] = \cos \left( \frac{x_0}{2} + \pi \right) = -\cos \frac{x_0}{2}$

Expr. (II) k par:  $\cos \frac{x}{2} = \cos \left( -\frac{x_0}{2} + 2k_1\pi \right) = \cos \left( -\frac{x_0}{2} \right) = \cos \frac{x_0}{2}$

Expr. (II) k ímpar:  $\cos \frac{x}{2} = \cos \left[ -\frac{x_0}{2} + (2k_1 + 1)\pi \right] = \cos \left( -\frac{x_0}{2} + \pi \right) = -\cos \frac{x_0}{2}$

## 77. É dado o sen x

Sabemos que  $\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$ , portanto, tendo  $\sin x$ , calculamos  $\cos x$  e entramos com as fórmulas do parágrafo anterior.

## EXERCÍCIOS

C.161 Calcular as funções circulares de  $\frac{\pi}{8}$ .

Solução

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1$$

C.162 Se  $\sin x = \frac{24}{25}$  e  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , calcular as funções circulares de  $\frac{x}{2}$ .

Solução

$$\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{576}{625}} = -\frac{7}{25}$$

$$\sin \frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = +\sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = +\sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = +\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

Observemos que  $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

C.163 Se  $\operatorname{tg} x = \frac{5}{12}$ , calcular  $\sin \frac{x}{2}$ .

Solução

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{25}{144}}} = \pm \frac{12}{13}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 \mp \frac{12}{13}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{13 \mp 12}{26}}$$

então há 4 possibilidades para  $\sin \frac{x}{2}$ :

$$+\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}}, +\frac{5}{\sqrt{26}} \text{ ou } -\frac{5}{\sqrt{26}}.$$

C.164 (FAUUSP-69) Sabendo-se que  $x$  é um arco do primeiro quadrante e  $\cos x = \frac{1}{3}$ , determinar  $\sin \frac{x}{2}$  e  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

C.165 Sabendo que  $\cos x = \frac{24}{25}$  e  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , calcular  $\sin \frac{x}{4}$ ,  $\cos \frac{x}{4}$  e  $\operatorname{tg} \frac{x}{4}$ .

C.166 Sendo  $\sec x = 4$  e  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ , calcular  $\operatorname{tg} \left( \frac{\pi + x}{2} \right)$ .

C.167 Estudar a variação da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$

Solução

De  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$  decorre que  $\frac{1 - \cos 2x}{2} = \sin^2 x$ , portanto,

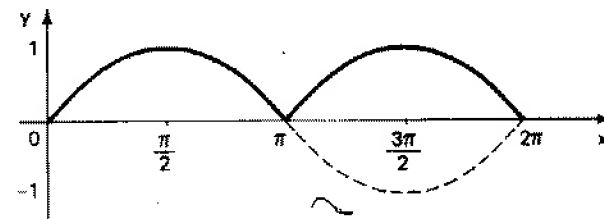
$$f(x) = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$$

já vimos que:

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$p = \pi$$

$$\operatorname{Im}(f) = [0; 1]$$



C.168 Estudar a variação da função  $f: \mathbb{R} - \{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = (1 - \cos 2x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + \cos 2x)^{-\frac{1}{2}}.$$

C.169 Qual é o período da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = (1 + \cos 4x)^{\frac{1}{2}}$ ?

C.170 a) Para todo real  $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), provar que  $\frac{1}{\sin \alpha} = \cotg \frac{\alpha}{2} - \cotg \alpha$ .

b) Demonstrar, utilizando o resultado anterior, que

$$\frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin 4a} + \dots + \frac{1}{\sin 2^na} = \cotg \frac{a}{2} - \cotg 2^na.$$

#### IV. TANGENTE DO ARCO METADE

Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas de  $x$ , conhecida a  $\tg \frac{x}{2}$ .

Das fórmulas de multiplicação, temos:

$$\begin{aligned} \sin 2a &= 2 \cdot \sin a \cdot \cos a = 2 \cdot \sin a \cdot \frac{\cos^2 a}{\cos a} = 2 \cdot \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{1}{\sec^2 a} = \\ &= \frac{2 \cdot \tg a}{1 + \tg^2 a} \\ \tg 2a &= \frac{2 \cdot \tg a}{1 - \tg^2 a} \end{aligned}$$

Fazendo  $2a = x$  e  $a = \frac{x}{2}$ , temos:

$$\sin x = \frac{2 \cdot \tg \frac{x}{2}}{1 + \tg^2 \frac{x}{2}}$$

e

$$\tg x = \frac{2 \cdot \tg \frac{x}{2}}{1 - \tg^2 \frac{x}{2}}$$

Notando que  $\cos x = \frac{\sin x}{\tg x}$ , temos:

$$\cos x = \frac{1 - \tg^2 \frac{x}{2}}{1 + \tg^2 \frac{x}{2}}$$

A utilidade destas três últimas fórmulas é permitir a substituição de  $\sin x$ ,  $\cos x$  e  $\tg x$  por uma única função ( $\tg \frac{x}{2}$ ), através de expressões racionais. Esse tipo de substituição é frequentemente utilizado na resolução de equações trigonométricas.

#### V. TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

78. Em Álgebra Elementar, têm grande importância prática os recursos para transformar um polinômio em produto de outros polinômios (fatoração). Assim, por exemplo, temos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= x(x - 2) && \longrightarrow \text{colocação em evidência} \\ x^2 - 4 &= (x + 2)(x - 2) && \longrightarrow \text{diferença de quadrados} \\ \left. \begin{aligned} x^2 + 4x + 4 &= (x + 2)^2 \\ x^2 - 4x + 4 &= (x - 2)^2 \end{aligned} \right\} && \longrightarrow \text{trinômios quadrados perfeitos} \\ x^3 + 8 &= (x + 2)(x^2 - 2x + 4) && \longrightarrow \text{soma de cubos} \\ x^3 - 8 &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) && \longrightarrow \text{diferença de cubos} \\ \left. \begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 &= (x + 1)^3 \\ x^3 - 3x^2 + 3x - 1 &= (x - 1)^3 \end{aligned} \right\} && \longrightarrow \text{polinômios cubos perfeitos} \end{aligned}$$

Muitas vezes aplicaremos esses recursos à Trigonometria, recorrendo a transformações como:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - 2 \cdot \sin x &= \sin x (\sin x - 2) \\ \sin^2 x - \cos^2 x &= (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) \end{aligned}$$

Além dos recursos algébricos, a Trigonometria dispõe de fórmulas que permitem completar uma fatoração. Assim, no exemplo acima, podemos fatorar:

$$\sin x + \cos x \quad \text{e} \quad \sin x - \cos x.$$

Vamos deduzir agora as fórmulas para transformar somas e diferenças trigonométricas em produtos.

79. Sabemos que:

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b & (1) \\ \cos(a-b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b & (2) \\ \sin(a+b) &= \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a & (3) \\ \sin(a-b) &= \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a & (4)\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}(1) + (2): \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \\ (1) - (2): \cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2 \cdot \sin a \cdot \sin b \\ (3) + (4): \sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2 \cdot \sin a \cdot \cos b \\ (3) - (4): \sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2 \cdot \sin b \cdot \cos a\end{aligned}$$

Estas relações são denominadas fórmulas de Werner.

80. Fazendo nas fórmulas de Werner:

$$\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases} \text{ portanto, } a = \frac{p+q}{2} \text{ e } b = \frac{p-q}{2}$$

obtemos as fórmulas de transformação em produto:

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \cdot \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}\end{aligned}$$

81. Temos ainda que:

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cdot \cos q + \sin q \cdot \cos p}{\cos p \cdot \cos q} \implies$$

$$\implies \boxed{\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}}$$

$$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} - \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cdot \cos q - \sin q \cdot \cos p}{\cos p \cdot \cos q} \implies$$

$$\implies \boxed{\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}}$$

## EXERCÍCIOS

C.171 Transformar em produto:

- $y = \sin 5x + \sin 3x$
- $y = \cos 3x + \cos x$
- $y = \sin 7a + \sin 5a - \sin 3a - \sin a$
- $y = \cos 9a + \cos 5a - \cos 3a - \cos a$
- $y = \sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c)$

Solução

$$a) y = 2 \cdot \sin \frac{5x+3x}{2} \cdot \cos \frac{5x-3x}{2} = 2 \cdot \sin 4x \cdot \cos x$$

$$b) y = 2 \cdot \cos \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2} = 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x$$

$$\begin{aligned}c) y &= (\sin 7a + \sin 5a) - (\sin 3a + \sin a) = \\ &= 2 \cdot \sin 6a \cdot \cos a - 2 \cdot \sin 2a \cdot \cos a = \\ &= 2 \cdot \cos a \cdot (\sin 6a - \sin 2a) = \\ &= 2 \cdot \cos a \cdot (2 \cdot \sin 2a \cdot \cos 4a) = \\ &= 4 \cdot \cos a \cdot \sin 2a \cdot \cos 4a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d) y &= (\cos 9a + \cos 5a) - (\cos 3a + \cos a) = \\ &= 2 \cdot \cos 7a \cdot \cos 2a - 2 \cdot \cos 2a \cdot \cos a = 2 \cdot \cos 2a \cdot (\cos 7a - \cos a) = \\ &= -4 \cdot \cos 2a \cdot \sin 4a \cdot \sin 3a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e) y &= (\sin a + \sin b) - (\sin(a+b+c) - \sin c) = \\ &= 2 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} - 2 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a+b+2c}{2} = \\ &= -2 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cdot \left[ \cos \frac{a+b+2c}{2} - \cos \frac{a-b}{2} \right] = \\ &= -2 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cdot \left( -2 \cdot \sin \frac{a+b+2c+a-b}{2} \cdot \sin \frac{a+b+2c-a+b}{2} \right) = \\ &= 4 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a+c}{2} \cdot \sin \frac{b+c}{2}\end{aligned}$$

**C.172 Transformar em produto:**

- a)  $y = 1 + \sin 2x$   
 b)  $y = 1 + \cos x$   
 c)  $y = 1 + \cos a + \cos 2a$   
 d)  $y = \sin a + 2 \cdot \sin 3a + \sin 5a$

**Solução**

a)  $y = \sin \frac{\pi}{2} + \sin 2x = 2 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} + x \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right) =$   
 $= 2 \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} + x \right)$   
 b)  $y = \cos 0 + \cos x = 2 \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \left( -\frac{x}{2} \right) = 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$   
 c)  $y = (\cos 2a + \cos 0) + \cos a = 2 \cdot \cos^2 a + \cos a =$   
 $= 2 \cdot \cos a \left( \cos a + \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \cos a \left[ \cos a + \cos \frac{\pi}{3} \right] =$   
 $= 4 \cdot \cos a \cdot \cos \left( \frac{a}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left( \frac{a}{2} - \frac{\pi}{6} \right)$   
 d)  $y = (\sin 5a + \sin a) + 2 \cdot \sin 3a = 2 \cdot \sin 3a \cdot \cos 2a + 2 \cdot \sin 3a =$   
 $= 2 \cdot \sin 3a \cdot [\cos 2a + 1] = 2 \cdot \sin 3a \cdot [\cos 2a + \cos 0] =$   
 $= 2 \cdot \sin 3a \cdot [2 \cdot \cos a \cdot \cos a] = 4 \cdot \sin 3a \cdot \cos^2 a$

**C.173 Transformar em produto:**

- a)  $y = \sin x + \cos x$  d)  $y = \sin^2 5x - \sin^2 x$   
 b)  $y = \cos 2x - \sin 2x$  e)  $y = \frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b}$   
 c)  $y = \cos^2 3x - \cos^2 x$

**Solução**

a)  $y = \sin x + \cos x = \sin x + \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) =$   
 $= 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$   
 b)  $y = \cos 2x - \cos \left( \frac{\pi}{2} - 2x \right) =$   
 $= -2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cdot \sin \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right)$   
 c)  $y = (\cos 3x + \cos x) \cdot (\cos 3x - \cos x) =$   
 $= (2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x) (-2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x) =$   
 $= -(2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x) (2 \cdot \sin x \cdot \cos x) =$   
 $= -\sin 4x \cdot \sin 2x$   
 d)  $y = (\sin 5x + \sin x) (\sin 5x - \sin x) =$   
 $= (2 \cdot \sin 3x \cdot \cos 2x) (2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x) =$   
 $= (2 \cdot \sin 3x \cdot \cos 3x) (2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x) =$   
 $= \sin 6x \cdot \sin 4x$   
 e)  $y = \frac{2 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}} = \tan \frac{a+b}{2}$

**C.174 Transformar em produto:**

- a)  $y = \sin (a + b + c) - \sin (a - b + c)$   
 b)  $y = \cos (a + 2b) + \cos a$   
 c)  $y = \sin a + \sin (a + r) + \sin (a + 2r) + \sin (a + 3r)$   
 d)  $y = \cos (a + 3b) + \cos (a + 2b) + \cos (a + b) + \cos a$   
 e)  $y = \cos^2 p - \cos^2 q$   
 f)  $y = \sin^2 p - \sin^2 q$   
 g)  $y = \cos^2 p - \sin^2 q$   
 h)  $y = \frac{\sin 2a + \sin 2b}{\cos 2a - \cos 2b}$   
 i)  $y = \frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}$

**C.175 (MAPOFEI-76) Transformar o produto  $\cos 2x \cdot \cos 4x$  em uma soma equivalente.**

**C.176 (FEFAAP-77) Provar que  $(\sin A + \cos A)^4 = 4 \cos^4 \left( A - \frac{\pi}{4} \right)$ .**

**C.177** Calcular o valor numérico da expressão:  $y = \sin \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12}$ .

**Solução**

Fazendo  $\frac{p+q}{2} = \frac{13\pi}{12}$  e  $\frac{p-q}{2} = \frac{11\pi}{12}$ , obtemos

$p = \frac{24\pi}{12} = 2\pi$  e  $q = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ , portanto:

$y = \frac{1}{2} (2 \cdot \sin \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12}) = \frac{1}{2} (\sin 2\pi + \sin \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} (0 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

**C.178** Calcular o valor numérico das expressões:

- a)  $y = \cos \frac{7\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$   
 b)  $y = \sin \frac{13\pi}{12} \cdot \sin \frac{7\pi}{12}$   
 c)  $y = \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24}$

**C.179** Provar que  $\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ = -\frac{1}{8}$ .

**Solução**

$\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ = \frac{2 \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ}{2} \cdot \cos 160^\circ =$   
 $= \frac{(\cos 120^\circ + \cos 40^\circ) \cdot \cos 160^\circ}{2} =$   
 $= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \cos 160^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 160^\circ}{2} =$   
 $= \frac{-\cos 160^\circ + \cos 200^\circ + \cos 120^\circ}{4} = \frac{\cos 120^\circ}{4} = -\frac{1}{8}$

C.180 Provar que  $\operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ = 4$ .

C.181 Demonstrar que, se A, B e C são ângulos internos de um triângulo, vale a relação:

$$a) \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

$$b) \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{C}{2}$$

$$c) \operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C$$

$$d) \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

Preliminares:

$$I) A + B + C = \pi \implies (B + C) = \pi - A \implies \begin{cases} \operatorname{sen}(B + C) = \operatorname{sen} A \\ \cos(B + C) = -\cos A \end{cases}$$

$$II) A + B + C = \pi \implies \frac{B + C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \implies \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{B + C}{2} = \cos \frac{A}{2} \\ \cos \frac{B + C}{2} = \operatorname{sen} \frac{A}{2} \end{cases}$$

**Solução**

$$a) 1^\circ \text{ membro} = \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C =$$

$$= \operatorname{sen} A + 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{B + C}{2} \cdot \cos \frac{B - C}{2} =$$

$$= 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} + 2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B - C}{2} =$$

$$= 2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \left[ \operatorname{sen} \frac{A}{2} + \cos \frac{B - C}{2} \right] =$$

$$= 2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \left[ \cos \frac{B + C}{2} + \cos \frac{B - C}{2} \right] =$$

$$= 2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \left[ 2 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \right] =$$

$$= 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = 2^\circ \text{ membro}$$

$$b) 1^\circ \text{ membro} = \cos A + \cos B + \cos C =$$

$$= \cos A + 2 \cdot \cos \frac{B + C}{2} \cdot \cos \frac{B - C}{2} =$$

$$= \left( 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} \right) + 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B - C}{2} =$$

$$= 1 - 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} \left[ \operatorname{sen} \frac{A}{2} - \cos \frac{B - C}{2} \right] =$$

$$= 1 - 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} \left[ \cos \frac{B + C}{2} - \cos \frac{B - C}{2} \right] =$$

$$= 1 - 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} \left[ -2 \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{C}{2} \right] =$$

$$= 1 + 4 \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{C}{2} = 2^\circ \text{ membro}$$

$$c) 1^\circ \text{ membro} = \operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C =$$

$$= \operatorname{sen} 2A + 2 \operatorname{sen}(B + C) \cdot \cos(B - C) =$$

$$= 2 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \cos A + 2 \operatorname{sen} A \cdot \cos(B - C) =$$

$$= 2 \cdot \operatorname{sen} A [\cos A + \cos(B - C)] =$$

$$= 2 \operatorname{sen} A [-\cos(B + C) + \cos(B - C)] =$$

$$= -2 \cdot \operatorname{sen} A [\cos(B + C) - \cos(B - C)] =$$

$$= -2 \cdot \operatorname{sen} A (-2 \cdot \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C) =$$

$$= 4 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C = 2^\circ \text{ membro}$$

$$d) \text{ Sabemos que } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \text{ e } \cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$$

$$1^\circ \text{ membro} = \cos^2 A + \frac{\cos 2B + 1}{2} + \frac{\cos 2C + 1}{2} =$$

$$= 1 + \cos^2 A + \frac{\cos 2B + \cos 2C}{2} =$$

$$= 1 + \cos^2 A + \cos(B + C) \cdot \cos(B - C) =$$

$$= 1 + \cos^2 A - \cos A \cdot \cos(B - C) =$$

$$= 1 - \cos A [\cos(B - C) - \cos A] =$$

$$= 1 - \cos A [\cos(B + C) + \cos(B - C)] =$$

$$= 1 - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 2^\circ \text{ membro}$$

C.182 Demonstrar que, se A, B, C são ângulos internos de um triângulo, vale a relação:

$$a) \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C - \operatorname{sen} A = 4 \cdot \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$$

$$b) \cos B + \cos C - \cos A = -1 + 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2}$$

$$c) \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$d) \operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C = 2 \cdot (1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

$$e) \frac{1}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} + \frac{1}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} + \frac{1}{\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A} = 1 \quad (A, B, C \neq \frac{\pi}{2})$$

C.183 Provar que se  $a + b + c = \frac{\pi}{2}$  então:

$$a) \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c = 1$$

$$b) \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c = 2$$

C.184 Provar que se  $(\operatorname{sen} 2A, \operatorname{sen} 2B, \operatorname{sen} 2C)$  é uma progressão aritmética, então o mesmo ocorre com  $(\operatorname{tg}(A + B), \operatorname{tg}(C + A), \operatorname{tg}(B + C))$ .

**Solução**

Por hipótese, temos:

$$\operatorname{sen} 2B - \operatorname{sen} 2A = \operatorname{sen} 2C - \operatorname{sen} 2B$$

$$2 \cdot \operatorname{sen}(B - A) \cdot \cos(B + A) = 2 \cdot \operatorname{sen}(C - B) \cdot \cos(C + B)$$

$$\operatorname{sen}[(B + C) - (A + C)] \cdot \cos(B + A) = \operatorname{sen}[(C + A) - (A + B)] \cdot \cos(C + B)$$

$$[\operatorname{sen}(B + C) \cdot \cos(A + C) - \operatorname{sen}(A + C) \cdot \cos(B + C)] \cdot \cos(B + A) =$$

$$= [\operatorname{sen}(C + A) \cdot \cos(A + B) - \operatorname{sen}(A + B) \cdot \cos(C + A)] \cdot \cos(C + B)$$

$$\operatorname{sen}(B + C) \cdot \cos(C + A) \cdot \cos(A + B) - \operatorname{sen}(C + A) \cdot \cos(B + C) \cdot \cos(A + B) =$$

$$= \operatorname{sen}(C + A) \cdot \cos(A + B) \cdot \cos(B + C) - \operatorname{sen}(A + B) \cdot \cos(C + A) \cdot \cos(C + B)$$

Dividindo por  $\cos(A + B) \cdot \cos(B + C) \cdot \cos(C + A)$ , temos:

$$\frac{\operatorname{sen}(B + C)}{\cos(B + C)} = \frac{\operatorname{sen}(C + A)}{\cos(C + A)} = \frac{\operatorname{sen}(C + A)}{\cos(C + A)} = \frac{\operatorname{sen}(A + B)}{\cos(A + B)}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(B + C)}{\cos(B + C)} = \frac{\operatorname{sen}(C + A)}{\cos(C + A)} = \frac{\operatorname{sen}(C + A)}{\cos(C + A)} = \frac{\operatorname{sen}(A + B)}{\cos(A + B)}$$

isto é:

$$\operatorname{tg}(B + C) - \operatorname{tg}(C + A) = \operatorname{tg}(C + A) - \operatorname{tg}(A + B)$$

C.185 Provar que se  $(\sin(a+b-c), \sin(a-b+c), \sin(-a+b+c))$  é uma progressão aritmética, então o mesmo ocorre com  $(\operatorname{tg} a, \operatorname{tg} b, \operatorname{tg} c)$ .

C.186 Provar que se  $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ , então

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = 1$$

**Solução**

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ membro} &= \sin^2 a + \frac{1 - \cos 2b}{2} + \frac{1 - \cos 2c}{2} + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = \\ &= 1 + \sin^2 a - \frac{\cos 2b + \cos 2c}{2} + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = \\ &= 1 + \sin^2 a - \cos(b+c) \cdot \cos(b-c) + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = \\ &= 1 + \sin^2 a - \sin a \cdot \cos(b-c) + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = \\ &= 1 + \sin a \cdot [\sin a - \cos(b-c)] + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = \\ &= 1 + \sin a \cdot [\cos(b+c) - \cos(b-c)] + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = \\ &= 1 - 2 \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = 1 = \\ &= 2^\circ \text{ membro} \end{aligned}$$

C.187 Estudar a variação, da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \cos x - \sin x$ .

**Solução**

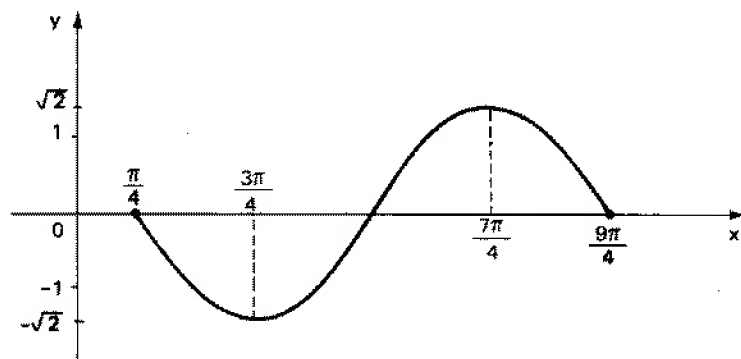
$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= -\sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Portanto:

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$p = 2\pi$$

$$\operatorname{Im}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$



C.188 Estudar a variação da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$ .

C.189 Qual é o período da função  $f(x) = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$ ?

C.190 Provar que se os ângulos de um triângulo ABC verificam a relação  $\cos A + \cos B = \sin C$ , então o triângulo é retângulo.

**Solução**

$$\cos A + \cos B = \sin C \implies$$

$$\implies 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} = 2 \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \implies$$

$$\implies \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} = \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \implies$$

$$\implies \cos \frac{A-B}{2} = \cos \frac{C}{2} \implies \begin{cases} A-B = C \implies A = B+C = \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ A-B = -C \implies B = A+C = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

C.191 Provar que se os ângulos de um triângulo ABC verificam a relação  $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$ , então o triângulo é retângulo.

C.192 Demonstrar que todo triângulo cujos ângulos verificam a relação  $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$  tem um ângulo de  $60^\circ$ .

## Moscou: preso escreve obra

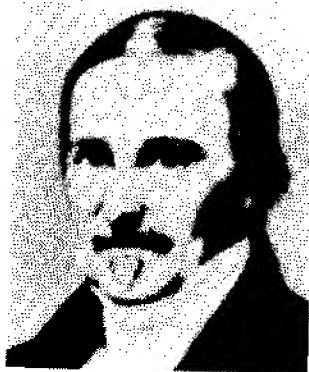
Jean Victor Poncelet nasceu em Metz, no ano de 1788.

Tendo-se destacado como estudante quando cursava a Escola Politécnica de Metz, Poncelet tornou-se conhecido como excelente professor de Matemática, sendo convidado a servir como engenheiro no exército napoleônico.

Em 1812, Poncelet lutou com as forças francesas na Rússia, caindo prisioneiro. Durante os dezoito meses de cativeiro, começou a escrever um de seus trabalhos mais notáveis: a Geometria Projetiva, teoria em que Desargues e Pascal tinham dado os primeiros passos, no século XVII.

Em 1814, Poncelet retornou à França e, a partir de 1815, começou a publicar suas criações nos "Anais da Matemática". Seus trabalhos iniciais versavam sobre os polígonos inscritos e circunscritos a uma cônica.

O grande trabalho de Poncelet, "Ensaio sobre as projetivas das seções cônicas", só apareceu em 1820 e foi melhorado e reproduzido dois anos depois com o título "Tratado das propriedades projetivas das figuras". Nestas obras, Poncelet observou que certas propriedades das figuras se mantêm constantes, quando as figuras sofrem deformações por projeções.



Jean V. Poncelet  
(1788 - 1867)

Poncelet foi ainda o criador da teoria da polaridade e do princípio da dualidade, base sobre a qual outros matemáticos como De Morgan, Whitehead e Russel desenvolveram posteriormente seus trabalhos.

Finalmente, Poncelet atingiu o máximo de sua criação quando estabeleceu o conceito de razão dupla ou anarmônica. Com base nesta descoberta, posteriormente, Klein conseguiu unificar as geometrias numa só, criando a pan-geometria.

Poncelet faleceu em 1867 na mesma cidade onde nascera.

## CAPÍTULO VII

# EQUAÇÕES

### I. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

82. Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  duas funções trigonométricas da variável  $x$  e sejam  $D_1$  e  $D_2$  os seus respectivos domínios. Resolver a equação trigonométrica  $f(x) = g(x)$  significa determinar o conjunto  $S$ , denominado *conjunto-solução* ou *conjunto-verdade*, dos números  $r$  para os quais  $f(r) = g(r)$  é uma sentença verdadeira. Observemos que uma condição necessária para que um certo  $r$  seja uma solução da equação dada é que  $r \in D_1$  e  $r \in D_2$ .

83. Quase todas as equações trigonométricas reduzem-se a uma das três equações seguintes:

1ª)  $\sin \alpha = \sin \beta$

2ª)  $\cos \alpha = \cos \beta$

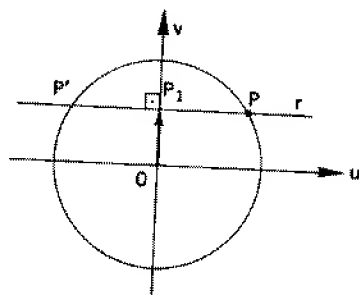
3ª)  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$

denominadas, por esse motivo, equações fundamentais. Assim, antes de mais nada, é necessário saber resolver as equações fundamentais para poder resolver qualquer outra equação trigonométrica.



## II. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $\sin \alpha = \sin \beta$

84. Se  $\sin \alpha = \sin \beta = \overline{OP_1}$ , então as imagens de  $\alpha$  e  $\beta$  no ciclo estão sobre a reta  $r$  que é perpendicular ao eixo dos senos no ponto  $P_1$ , isto é, estão em  $P$  ou  $P'$ .



Há, portanto, duas possibilidades:

1ª)  $\alpha$  e  $\beta$  têm a mesma imagem, isto é, são *côngruos* ou

2ª)  $\alpha$  e  $\beta$  têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos, isto é, são *suplementares*.

85. Em resumo, temos:

$$\sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

### EXERCÍCIOS

C.193 Resolver as seguintes equações:

a)  $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$

b)  $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3}$

c)  $\sin x = 0$

d)  $\sin x = \frac{1}{2}$

e)  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

g)  $\sin x = 1$

h)  $\sin x = -1$

**Solução**

a)  $\sin x = \sin \frac{\pi}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{5} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi\}$

b)  $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x = \sin \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$

c)  $\sin x = 0 = \sin 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - 0 + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = (2k+1) \cdot \pi\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$

d)  $\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

e)  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\}$

f)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$

g)  $\sin x = 1 = \sin \frac{\pi}{2}$ , então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$

h)  $\sin x = -1 = \sin \frac{3\pi}{2}$ , então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\}$

C.194 Resolver as equações abaixo:

a)  $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

b)  $\sin^2 x - \sin x = 0$

c)  $2 + \sin^2 x - 3 \cdot \sin x + 1 = 0$

d)  $2 \cdot \cos^2 x = 1 - \sin x$

**Solução**

a)  $\sin x = \pm \frac{1}{2}$  então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\}$$

b)  $\sin x \cdot (\sin x - 1) = 0 \implies \sin x = 0 \text{ ou } 1$  então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$$

c)  $\sin x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \implies \sin x = 1 \text{ ou } \frac{1}{2}$ , então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$$

d)  $2 \cdot (1 - \sin^2 x) = 1 - \sin x \implies 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$   
resolvendo:  $\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = 1 \text{ ou } -\frac{1}{2}$

recorremos em equações fundamentais

$\sin x = 1 \implies x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\sin x = -\frac{1}{2} \implies x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

C.195 Resolver as equações abaixo:

a)  $\sin x = \sin \frac{\pi}{7}$

c)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e)  $\sin^2 x = 1$

g)  $\sin x - \operatorname{cosec} x = 1$

i)  $\sin x + \cos 2x = 1$

b)  $\operatorname{cosec} x = 2$

d)  $2 \cdot \sin^2 x = 1$

f)  $2 \cdot \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

h)  $3 \cdot \operatorname{tg} x = 2 \cdot \cos x$

j)  $\cos^2 x = 1 - \sin x$

C.198 Resolver as seguintes equações:

a)  $\sin 2x = \frac{1}{2}$

c)  $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d)  $\sin 2x = \sin x$

**Solução**

a)  $\sin 2x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \implies \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi\}$$

b)  $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \implies \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\}$$

c)  $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \implies \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi\}$$

d)  $\sin 2x = \sin x \implies \begin{cases} 2x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - x + 2k\pi \end{cases}$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\}$$

C.199 Determinar  $x \in \mathbb{R}$  tal que:

a)  $\sin 5x = \sin 3x$

b)  $\sin 3x = \sin 2x$

C.200 Determinar os ângulos internos de um triângulo ABC sabendo que estão em progressão aritmética e que o seno da soma do menor ângulo com o ângulo médio é  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

C.201 (MAPOFEI-76) Resolver o sistema  $\begin{cases} \sin(x+y) = 0 \\ x-y = \pi \end{cases}$

### III. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $\cos \alpha = \cos \beta$

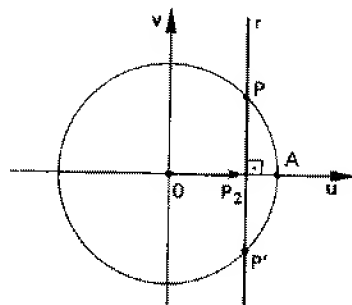
86. Se  $\cos \alpha = \cos \beta = \overline{OP}_2$ , então as imagens de  $\alpha$  e  $\beta$  no ciclo estão sobre a reta  $r$  que é perpendicular ao eixo dos cossenos no ponto  $P_2$ , isto é, estão em  $P$  ou  $P'$ .

Há, portanto, duas possibilidades:

1ª)  $\alpha$  e  $\beta$  têm a mesma imagem, isto é, são *côngruos*

ou

2ª)  $\alpha$  e  $\beta$  têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos, isto é, são *replementares*.



87. Em resumo, temos:

$$\cos \alpha = \cos \beta \implies \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

### EXERCÍCIOS

C.202 Resolver as seguintes equações:

a)  $\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$

b)  $\sec x = \sec \frac{2\pi}{3}$

c)  $\cos x = 0$

d)  $\cos x = 1$

e)  $\cos x = -1$

f)  $\cos x = \frac{1}{2}$

g)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

h)  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Solução**

a)  $\cos x = \cos \frac{\pi}{5} \implies x = \pm \frac{\pi}{5} + 2k\pi$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{5} + 2k\pi\}$

b)  $\sec x = \sec \frac{2\pi}{3} \implies \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos \frac{2\pi}{3}} \implies \cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$  então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$

c)  $\cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$  então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$

d)  $\cos x = 1 = \cos 0$  então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi\}$

e)  $\cos x = -1 = \cos \pi$  então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi\}$

f)  $\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$  então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$

g)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$  então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi\}$

h)  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$  então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

C.203 Resolver as equações abaixo:

a)  $4 \cdot \cos^2 x = 3$

b)  $\cos^2 x + \cos x = 0$

c)  $\sin^2 x = 1 + \cos x$

d)  $\cos 2x + 3 \cdot \cos x + 2 = 0$

**Solução**

a)  $\cos^2 x = \frac{3}{4} \implies \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ou  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

b)  $\cos x + (\cos x + 1) = 0 \implies \cos x = 0$  ou  $\cos x = -1$  então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi\}$

c)  $1 - \cos^2 x = 1 + \cos x \implies \cos^2 x + \cos x = 0$   
e resolvemos no anterior.

d)  $(2 \cdot \cos^2 x - 1) + 3 \cdot \cos x + 2 = 0 \implies 2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \cos x + 1 = 0$   
 $\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \implies \cos x = -1$  ou  $\cos x = -\frac{1}{2}$

então  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$

C.204 Resolver as equações abaixo:

a)  $\cos x = -\frac{1}{2}$

b)  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d)  $\sec x = 2$

e)  $2 \cdot \cos^2 x = \cos x$

f)  $4 \cdot \cos x + 3 \cdot \sec x = 8$

g)  $2 - 2 \cdot \cos x = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$

h)  $2 \cdot \sin^2 x + 6 \cdot \cos x = 5 + \cos 2x$

i)  $1 + 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x = 5 \cdot \sec x$

j)  $(4 - \frac{3}{\sin^2 x}) \cdot (4 - \frac{1}{\cos^2 x}) = 0$

C.205 Resolver as seguintes equações:

a)  $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $\cos 2x = \cos x$

c)  $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = 0$

d)  $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$

Solução

a)  $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \implies 2x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ , então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi\}$$

b)  $\cos 2x = \cos x \implies \begin{cases} 2x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -x + 2k\pi \end{cases}$  então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{3}\}$$

c)  $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = 0 = \cos \frac{\pi}{2} \implies x + \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$$

d)  $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 = \cos 0 \implies x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$ , então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\}$$

C.206 Resolver as seguintes equações:

a)  $\cos 3x - \cos x = 0$

b)  $\cos 5x = \cos(x + \frac{\pi}{3})$

C.207 Determinar os ângulos internos de um triângulo ABC sabendo que

$$\cos(A + B) = \frac{1}{2} \text{ e } \sin(B + C) = \frac{1}{2}$$

C.208 (MAUÁ-77) Dada a equação  $(\sin x + \cos y)(\sec x + \operatorname{cosec} y) = 4$

a) resolva-a se:  $x = y$

b) resolva-a se:  $\sin x = \cos y$

#### IV. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$

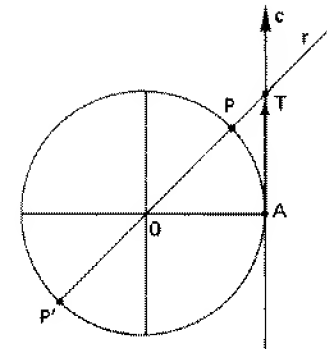
88. Se  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \overline{OT}$ , então as imagens de  $\alpha$  e  $\beta$  estão sobre a reta  $r$  determinada por  $O$  e  $T$ , isto é, estão em  $P$  ou  $P'$ .

Há, portanto, duas possibilidades:

1ª)  $\alpha$  e  $\beta$  têm a mesma imagem, isto é, são congruos

ou

2ª)  $\alpha$  e  $\beta$  têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo, isto é, são explementares.



89. Em resumo, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \implies \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases} \implies \alpha = \beta + k\pi$$

#### EXERCÍCIOS

C.209 Resolver as equações seguintes:

a)  $\operatorname{tg} x = 1$

b)  $\cotg x = \sqrt{3}$

c)  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

d)  $\operatorname{tg} x = 0$

e)  $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$

f)  $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$

g)  $\operatorname{tg} 3x = 1$

h)  $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x$

Solução

a)  $\operatorname{tg} x = 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ , então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\}$$

$$b) \cotg x = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}, \text{ então:}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi\}$$

$$c) \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}, \text{ então:}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi\}$$

$$d) \operatorname{tg} x = 0 = \operatorname{tg} 0, \text{ então:}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$$

$$e) \operatorname{tg} 2x = \sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi,$$

então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\}$$

$$f) \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x \Rightarrow 2x = x + k\pi,$$

então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$$

$$g) \operatorname{tg} 3x = 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\}$$

$$h) \operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x \Rightarrow 5x = 3x + k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

Notemos que se  $k$  for ímpar, então não existem  $\operatorname{tg} 5x$  e  $\operatorname{tg} 3x$ , portanto:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \text{ par}\}$$

**C.210 Resolver as equações abaixo:**

$$a) \sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$$

$$b) \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$c) \operatorname{tg} x + \cotg x = 2$$

$$d) \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg} x$$

**Solução**

$$a) \sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi\}$$

$$b) \sin^2 x = \cos^2 x \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1,$$

$$\text{então: } \operatorname{tg} x = 1 \text{ ou } \operatorname{tg} x = -1$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\}$$

$$c) \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2 \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1, \text{ então:}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\}$$

$$d) \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg} x \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x - 1) = 0,$$

$$\text{então: } \operatorname{tg} x = 0 \text{ ou } \operatorname{tg} x = 1$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi\}$$

**C.211 Resolver as equações abaixo:**

$$a) \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$$

$$f) \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = 0$$

$$b) \cotg x = \cotg \frac{5\pi}{6}$$

$$g) \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})$$

$$c) 3 \cdot \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$h) \operatorname{tg} 4x = 1$$

$$d) \cotg x = 0$$

$$i) \cotg 2x = \cotg(x + \frac{\pi}{4})$$

$$e) \cotg x = -1$$

$$j) \operatorname{tg}^2 2x = 3$$

**C.212 Resolver as equações abaixo:**

$$a) \sec^2 x = 2 \cdot \operatorname{tg} x$$

$$b) \frac{1}{\sin^2 x} = 1 - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$c) \sin 2x \cdot \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos 2x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$d) (1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$$

**C.213 (MAPOFEI-75) Resolver a equação  $\cotg x - \sin 2x = 0$ .**

**C.214 (FEI-77) Para quais valores de  $p$ , a equação:  $\operatorname{tg} p x = \cotg p x$  tem  $x = \frac{\pi}{2}$  para raiz.**

## V. SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO DENTRO DE CERTO INTERVALO

90. Quando desejamos obter as soluções de uma equação pertencentes a um certo intervalo  $I$ , seguimos a sequência de operações abaixo:

1º) resolvemos normalmente a equação, não tomando conhecimento do intervalo  $I$  até obtermos a solução geral;

2º) obtida a solução geral, onde necessariamente aparece a variável  $k$  inteira, atribuímos a  $k$  todos os valores inteiros que acarretem  $x \in I$ .

O conjunto-solução será formado pelos valores de  $x$  calculados com os valores escolhidos para  $k$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \text{ou} \\ \textcircled{2} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (\text{chamada solução geral})$$

A solução geral é o conjunto de todos os arcos que satisfazem à equação dada, ao passo que queremos só os arcos-solução do intervalo  $0 \rightarrow 2\pi$ , então vamos atribuir valores a  $k$ :

$$\text{em } \textcircled{1} \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{em } \textcircled{2} \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

Observamos que qualquer outro valor atribuído a  $k$  em  $\textcircled{1}$  ou  $\textcircled{2}$  acarretaria  $x \notin [0, 2\pi]$ .

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3} \right\}$$

$$\text{C.217 Determinar } x \text{ tal que } 0 < x < \pi \text{ e } \sin 3x = \frac{1}{2}.$$

C.218 Quais são os arcos do intervalo fechado  $0 \rightarrow 2\pi$  tais que o seu seno é igual ao seno do seu dobro?

**Solução**

Chamemos de  $x$  os arcos procurados, então:

$$\sin 2x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 2x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - x + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix}$$

$$\text{Em } \textcircled{1} \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = 0 \\ k = 1 \Rightarrow x = 2\pi \end{cases}$$

$$\text{em } \textcircled{2} \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ k = 1 \Rightarrow x = \pi \\ k = 2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi \right\}$$

## EXERCÍCIOS

C.215 Determinar  $x \in [0, 2\pi]$  tal que  $2 \cdot \sin x = 1$ .

**Solução**

A solução geral da equação  $\sin x = \frac{1}{2}$  é

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Se queremos  $0 \leq x \leq 2\pi$ , devemos atribuir a  $k$  o valor 0, então:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

C.216 Quais são os arcos do intervalo fechado  $0 \rightarrow 2\pi$  tais que o seno do seu dobro é  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ?

**Solução**

Chamemos de  $x$  os arcos procurados, então:

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow$$

C.219 Obter as soluções da equação  $\sin 3x = \sin 2x$  que pertencem ao intervalo  $[0, \pi]$ .

C.220 Determinar  $x$  tal que  $0 < x < 2\pi$  e  $\cos 2x = \frac{1}{2}$ .

**Solução**

$$\text{Temos } \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\text{De } (1) \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \end{cases} \quad \text{de } (2) \begin{cases} k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \\ k = 2 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{então } S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

C.221 Obter  $x$  tal que  $\cos 3x = \cos 2x$  e  $0 \leq x \leq \pi$ .

C.222 (EESCUSP-69) Achar as soluções de  $4 \cdot \sin^3 x - \sin x = 0$  para  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

C.223 Determinar  $x$  tal que  $0 \leq x \leq \pi$  e  $\lg 6x = \lg 2x$ .

**Solução**

$$\lg 6x = \lg 2x \Rightarrow 6x = 2x + k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

Fazendo  $k = 0, 1, 2, 3$ , e  $4$ , obtemos respectivamente  $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$  e

$\pi$ . Excluindo os valores  $\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{3\pi}{4}$  para os quais não existem as tangentes de  $6x$

e  $2x$ , vem

$$S = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$$

C.224 (MAPOFEI-74) Calcular  $x$  no intervalo  $0 \leq x \leq 2\pi$  tal que  $\lg x + \cotg x = 2$ .

C.225 Sendo  $0 \leq x \leq \pi$ , resolver  $\sqrt{\sin^2 x} - \sqrt{\cos^2 x} = 0$ .

C.226 (Itajubá-69) Resolver a equação  $\sin x + \sin y = 1$  sabendo que  $x + y = \frac{\pi}{3}$ .

## VI. EQUAÇÕES CLÁSSICAS

Apresentaremos neste item algumas equações tradicionais em Trigonometria, sugerindo métodos para fazê-las recair nas equações fundamentais.

$$91. a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^*)$$

**Método 1**

Fazemos a mudança de variável  $\sin x = u$  e  $\cos x = v$  e resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} au + bv = c \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

Tendo calculado  $u$  e  $v$ , determinamos os possíveis valores de  $x$ .

**Método 2**

Fazendo  $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \theta$ , temos:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c \Rightarrow \sin x + \frac{b}{a} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x + \operatorname{tg} \theta \cdot \cos x = \frac{c}{a} \Rightarrow \sin x + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \cos \theta + \sin \theta \cdot \cos x = \frac{c}{a} \cdot \cos \theta \Rightarrow \sin(x + \theta) = \frac{c}{a} \cdot \cos \theta$$

e, assim, calculamos  $x + \theta$ .

**Método 3**

Fazendo  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , temos  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$  e  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ , então:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c \Rightarrow a \cdot \frac{2t}{1+t^2} + b \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2at + b - bt^2 = c + ct^2 \Rightarrow (c+b)t^2 - 2at + (c-b) = 0$$

e recaímos em uma equação do 2º grau em  $t$ . Observemos que este método falha se  $\pi + 2k\pi$  for solução da equação, caso em que a substituição

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = t$  não tem sentido.

## EXERCÍCIOS

C.227 Resolver a equação  $\sqrt{3} \cdot \cos x + \sin x = 1$ 

Solução

Método 1

Fazendo  $\sin x = u$  e  $\cos x = v$ , temos:

$$\begin{cases} u + v \cdot \sqrt{3} = 1 & (1) \\ u^2 + v^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

De (1) vem  $u = 1 - v \cdot \sqrt{3}$  que, substituída em (2), acarreta:

$$(1 - v \cdot \sqrt{3})^2 + v^2 = 1 \Rightarrow 4v^2 - 2\sqrt{3} \cdot v = 0$$

$$\text{então } \begin{cases} v = 0 \\ \text{ou} \\ v = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{portanto } \begin{cases} u = 1 - 0 \cdot \sqrt{3} = 1 \\ \text{ou} \\ u = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Existem, assim, duas possibilidades:

$$\cos x = 0, \sin x = 1 \text{ e } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ou

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin x = -\frac{1}{2} \text{ e } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Método 2

$$\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 1 \Rightarrow \sin x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \cos x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cdot \cos x = 1 \Rightarrow$$

$$\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

Método 3

$$\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 1 \Rightarrow \frac{2t}{1+t^2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t + \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot t^2 = 1 + t^2 \Rightarrow (1 + \sqrt{3})t^2 - 2t + (1 - \sqrt{3}) = 0$$

Então:

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}}{2(1 + \sqrt{3})} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})} = 1 \text{ ou } -2 + \sqrt{3}$$

Existem, assim, duas possibilidades:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ e } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ou

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -2 + \sqrt{3}, \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{12} + k\pi \text{ e } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

C.228 Resolver as seguintes equações:

$$a) \sin x + \cos x = -1 \quad b) \sqrt{3} \cdot \sin x - \cos x = -\sqrt{3}$$

C.229 Determinar  $x$  tal que  $0 \leq x \leq 2\pi$  e  $\sin x + \cos x = 1$ .

Solução

Fazendo  $\sin x = u$  e  $\cos x = v$ , temos:

$$\begin{cases} u + v = 1 & (1) \\ u^2 + v^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \text{ em } (2): u^2 + (1 - u)^2 = 1 \Rightarrow 2u^2 - 2u = 0$$

Existem, então, duas possibilidades:

$$u = 0 \text{ e } v = 1 - u = 1 \quad \text{ou} \quad u = 1 \text{ e } v = 1 - u = 0$$

$$\text{portanto } S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}$$

C.230 Obter as soluções das equações abaixo, dentro do intervalo  $[0, 2\pi]$ :

$$a) \sin 4x + \cos 4x = 1 \quad b) |\sin x| + |\cos x| = 1$$

C.231 (MACK-70) Resolva no conjunto dos números reais a equação  $\sin 2x = 1 - \cos 2x$ .C.232 Discutir a equação em  $x$ :  $m \cdot \sin x + \cos x = m$ 

Solução

$$\text{Fazendo } \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ e } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{ temos:}$$

$$m \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = m \Rightarrow 2mt + 1 - t^2 = m + mt^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+1) \cdot t^2 - 2mt + (m-1) = 0$$

Esta última equação tem solução real se, e somente se, apresentar  $\Delta \geq 0$ , então:

$$\Delta = 4m^2 - 4(m+1)(m-1) = 4 \geq 0$$

o que ocorre para todo  $m$  real.



C.233 Discutir, segundo  $m$ , as equações seguintes:

- a)  $m \cdot \cos x - (m+1) \cdot \sin x = m$   
 b)  $\sin x + \cos x = m$

92.  $\sum \sin f_i(x) = 0$  ou  $\sum \cos f_i(x) = 0$

O método de resolução consiste em transformar a soma em produto e estudar as possibilidades de anulamento de cada fator.

## EXERCÍCIOS

C.234 Resolver as equações:

- a)  $\sin 7x + \sin 5x = 0$       b)  $\cos 6x + \cos 2x = 0$   
 c)  $\sin 4x - \cos x = 0$       d)  $\cos 3x + \sin 2x = 0$

### Solução

a)  $\sin 7x + \sin 5x = 0 \Rightarrow 2 \cdot \sin 6x \cdot \cos x = 0$

1ª possibilidade:  $\sin 6x = 0 \Rightarrow 6x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{6}$

2ª possibilidade:  $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$

b)  $\cos 6x + \cos 2x = 0 \Rightarrow 2 \cdot \cos 4x \cdot \cos 2x = 0$

1ª possibilidade:  $\cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$

2ª possibilidade:  $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\}$

c)  $\sin 4x - \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0$

1ª possibilidade:  $\sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$

2ª possibilidade:  $\cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\}$

d)  $\cos 3x + \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$

1ª possibilidade:  $\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

2ª possibilidade:  $\cos(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\}$

C.235 Resolver as equações:

a)  $\sin mx + \sin nx = 0$  ( $m, n \in \mathbb{N}^*$ )

b)  $\cos ax + \cos bx = 0$  ( $a, b \in \mathbb{R}^*$ )

c)  $\sin 2x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

C.236 Resolver as seguintes equações:

a)  $\sin x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 6x = 0$

b)  $\cos 3x + \cos 7x = \cos 5x$

### Solução

a)  $(\sin 6x + \sin 4x) + (\sin 3x + \sin x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \sin 5x \cdot \cos x + 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x \cdot (\sin 5x + \sin 2x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \cos x \cdot \sin \frac{7x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} = 0$

1ª possibilidade:  $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

2ª possibilidade:  $\sin \frac{7x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7}$

3ª possibilidade:  $\cos \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{2k\pi}{7} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\}$

b)  $(\cos 7x + \cos 3x) - \cos 5x = 0 \Rightarrow 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x - \cos 5x = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2 \cdot \cos 5x (\cos 2x - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow$

1ª possibilidade:  $\cos 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$

2ª possibilidade:  $\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \text{ ou } x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi\}$

C.237 Resolver as equações:

a)  $\sin 5x + \sin x = 2 \cdot \sin 3x$

b)  $\cos x + \cos(2x + a) + \cos(3x + 2a) = 0$

c)  $\sin 7x + \cos 3x = \cos 5x - \sin x$

C.238 Determinar  $x$  tal que  $0 \leq x \leq \pi$  e  $\cos^2(x+a) + \cos^2(x-a) = 1$ .

C.239 Determinar  $x$  tal que  $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 1$  e  $0 \leq x \leq \pi$ .

C.240 (MAPOFEI-74) Determinar o ângulo  $x$ , medido em radianos, que satisfaz a igualdade:

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) + \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

C.241 (MAUÁ-77) Dado o sistema

$$\begin{cases} \sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \\ \sin x + \cos y = 2 \end{cases}$$

a) mostre que o par  $(x_0, y_0)$  com  $x_0 = 2\pi$  e  $y_0 = \frac{\pi}{2}$  não é solução do sistema.

b) resolva o sistema, determinando todas as soluções  $(x, y)$ .

C.242 (FEI-77) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \sin a + \cos b = 1 \\ \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

sendo,  $a$  e  $b$ , do 1º quadrante.

93.  $\sin^4 x + \cos^4 x = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ )

Para resolver esta equação basta aplicar a identidade

$$\sin^4 x + \cos^4 x \equiv 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} \text{ pois:}$$

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \\ &= 1^2 - 2 \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} \end{aligned}$$

Temos então:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = a \Rightarrow 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = a \Rightarrow \sin^2 2x = 2(1-a).$$

Notemos que só existe solução se  $0 \leq 2(1-a) \leq 1$ , isto é, se

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1.$$

94.  $\sin^6 x + \cos^6 x = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ )

Resolver esta equação aplicando a identidade:

$$\sin^6 x + \cos^6 x \equiv 1 - \frac{3 \sin^2 2x}{4} \text{ pois:}$$

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ &= (\sin^4 x + \cos^4 x) - \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \left(1 - \frac{\sin^2 2x}{2}\right) - \frac{\sin^2 2x}{4} = \\ &= 1 - \frac{3 \cdot \sin^2 2x}{4} \end{aligned}$$

Temos então:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a \Rightarrow 1 - \frac{3 \cdot \sin^2 2x}{4} = a \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{4-4a}{3}$$

Notemos que só existe solução se  $0 \leq \frac{4-4a}{3} \leq 1$ , isto é, se

$$\frac{1}{4} \leq a \leq 1.$$

## EXERCÍCIOS

C.243 Resolver a equação  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$ .

**Solução**

Decorre da teoria que:

$$\sin^2 2x = 2(1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$$

portanto  $\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  e então:

$$2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\}$$

C.244 Resolver a equação  $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$ .

**Solução**

Decorre da teoria que:

$$\sin^2 2x = \frac{4}{3} \cdot (1 - a) = \frac{4}{3} \cdot (1 - \frac{7}{16}) = \frac{3}{4}$$

portanto  $\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  e então:

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\}$$

C.245 Resolver as seguintes equações para  $x \in [0, 2\pi]$ :

a)  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$

b)  $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8}$

c)  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$

d)  $\sin^6 \frac{x}{2} + \cos^6 \frac{x}{2} = \frac{7}{16}$

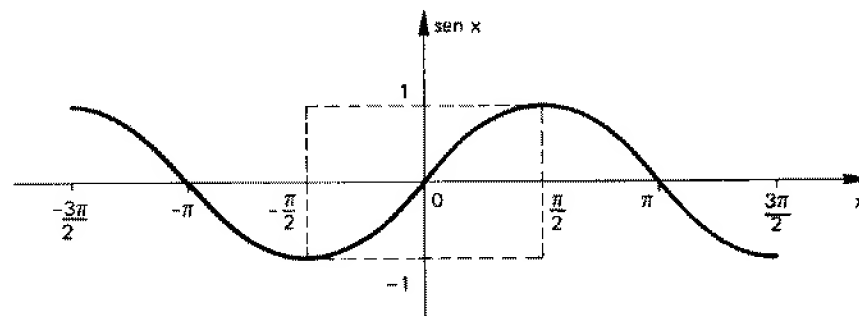
e)  $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

## VII. FUNÇÕES CIRCULARES INVERSAS

### 95. Função Arco-Seno

A função seno, isto é,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \sin x$  é evidentemente não sobrejetora (pois  $\nexists x \in \mathbb{R}$  tal que  $\sin x = 2$ ) e não injetora (pois  $\frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$  e  $\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6}$ ).

Se considerarmos a função seno restrita ao intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  e com contradomínio  $[-1, 1]$ , isto é,  $g: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  tal que  $g(x) = \sin x$ , notamos que



1º)  $g$  é sobrejetora pois para todo  $y \in [-1, 1]$  existe  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  tal que  $\sin x = y$ ;

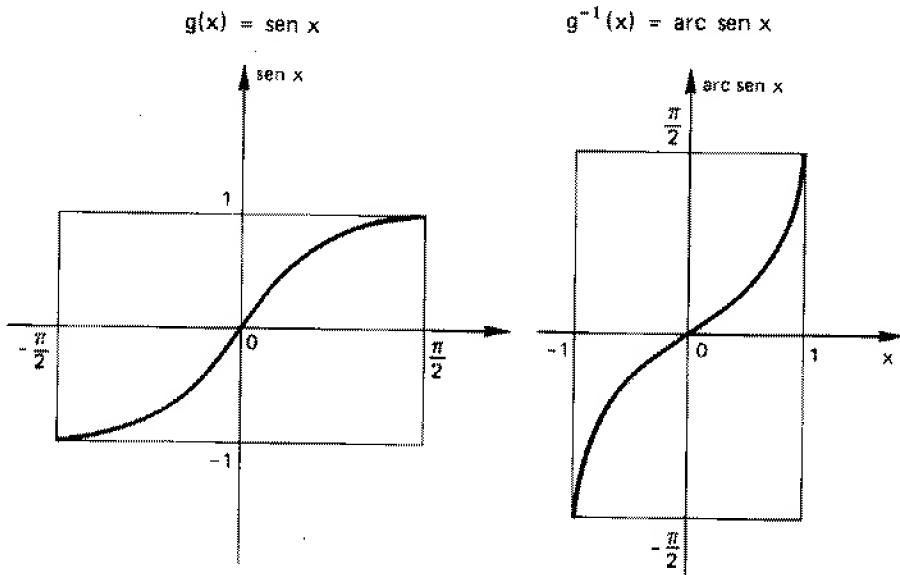
2º)  $g$  é injetora pois no intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  a função seno é crescente, então:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sin x_1 \neq \sin x_2$$

Assim sendo, a função  $g$  admite inversa e  $g^{-1}$  é denominada função arco-seno. Notemos que  $g^{-1}$  tem domínio  $[-1, 1]$ , contradomínio  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  e associa a cada  $x \in [-1, 1]$  um  $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  tal que  $y$  é um arco cujo seno é  $x$  (indica-se  $y = \arcsin x$ ). Temos, portanto, que:

$$y = \arcsin x \iff \sin y = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Já vimos que os gráficos de duas funções inversas entre si são simétricas em relação à reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes, então a partir do gráfico de  $g$  obtemos o gráfico de  $g^{-1}$ :



## EXERCÍCIOS

C.246 Determinar  $\alpha$  tal que  $\alpha = \text{arc sen } \frac{1}{2}$ .

**Solução**

Temos:

$$\alpha = \text{arc sen } \frac{1}{2} \iff \text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

isto é,  $\text{arc sen } \frac{1}{2}$  não é qualquer  $\alpha$  tal que  $\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$  mas aquele  $\alpha$  (único) que está no intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , isto é,  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .

C.247 Determinar os seguintes números:  $\text{arc sen } 0$ ,  $\text{arc sen } \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\text{arc sen } (-\frac{1}{2})$ ,  $\text{arc sen } 1$  e  $\text{arc sen } (-1)$ .

C.248 Calcular  $\cos(\text{arc sen } \frac{1}{3})$ .

**Solução**

Fazendo  $\text{arc sen } \frac{1}{3} = \alpha$ , temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{3} \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

então

$$\cos \alpha = +\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha} = +\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = +\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

C.249 Calcular  $\text{tg}(\text{arc sen } \frac{3}{4})$ .

C.250 Calcular  $\cos(\text{arc sen } \frac{3}{5} + \text{arc sen } \frac{5}{13})$ .

**Solução**

Fazendo  $\text{arc sen } \frac{3}{5} = \alpha$ , temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{então } \cos \alpha = +\sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$$

Fazendo  $\text{arc sen } \frac{5}{13} = \beta$ , temos:

$$\text{sen } \beta = \frac{5}{13} \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{então } \cos \beta = +\sqrt{1 - (\frac{5}{13})^2} = \frac{12}{13}$$

Finalmente, temos:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta = \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{48 - 15}{65} = \frac{33}{65} \end{aligned}$$

C.251 Calcular:

a)  $\text{tg}(\text{arc sen } (-\frac{2}{3}) + \text{arc sen } \frac{1}{4})$

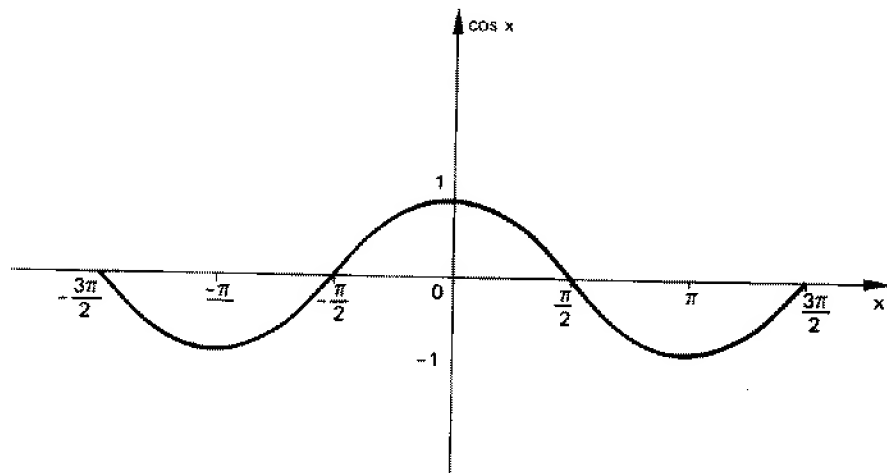
b)  $\text{sen}(2 \cdot \text{arc sen } (-\frac{3}{5}))$

c)  $\cos(3 \cdot \text{arc sen } \frac{12}{13})$

## 96. Função arco-cosseno

A função cosseno, isto é,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \cos x$  é não sobrejetora (pois  $\nexists x \in \mathbb{R}$  tal que  $\cos x = 3$ ) e não injetora (pois  $0 \neq 2\pi$  e  $\cos 0 = \cos 2\pi$ ).

Se considerarmos a função cosseno restrita ao intervalo  $[0, \pi]$  e com contradomínio  $[-1, 1]$ , isto é,  $g: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  tal que  $g(x) = \cos x$ , notamos que:



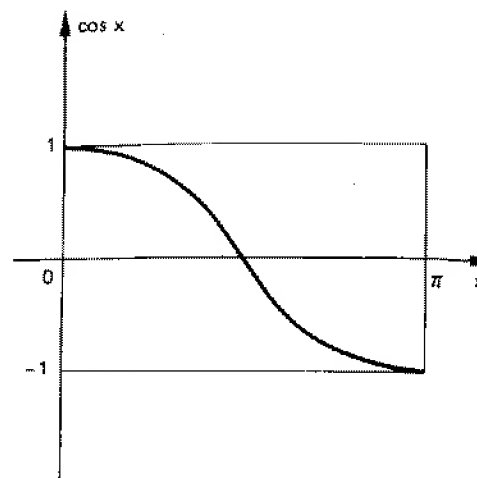
1ª)  $g$  é sobrejetora:  $\forall y \in [-1, 1], \exists x \in [0, \pi] \mid \cos x = y$ ;

2ª)  $g$  é injetora:  $\forall x_1, x_2 \in [0, \pi], x_1 \neq x_2 \Rightarrow \cos x_1 \neq \cos x_2$ , pois  $g$  é decrescente.

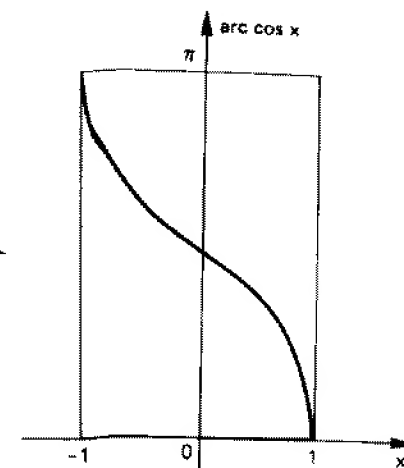
Assim,  $g$  admite inversa e  $g^{-1}$  é denominada função arco-cosseno. Notamos que  $g^{-1}$  tem domínio  $[-1, 1]$ , contradomínio  $[0, \pi]$  e associa a cada  $x \in [-1, 1]$  um  $y \in [0, \pi]$  tal que  $y$  é um arco cujo cosseno é  $x$  (indica-se  $y = \arccos x$ ). Temos, portanto, que:

$$y = \arccos x \iff \cos y = x \text{ e } 0 \leq y \leq \pi$$

Como os gráficos de  $g$  e  $g^{-1}$  são simétricos em relação à reta  $y = x$ , podemos construir o gráfico de  $g^{-1}$  a partir do de  $g$ .



$$g(x) = \cos x$$



$$g^{-1}(x) = \arccos x$$

## EXERCÍCIOS

C.252 Determinar  $\alpha$  tal que  $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Solução**

Temos:

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } 0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$\text{então } \alpha = \frac{\pi}{6}$$

C.253 Determinar os seguintes números:  $\arccos 1$ ,  $\arccos \frac{1}{2}$ ,  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\arccos 0$ ,  $\arccos (-1)$ .

C.254 Calcular  $\operatorname{tg}(\arccos \frac{2}{5})$ .

**Solução**

Fazendo  $\arccos \frac{2}{5} = \alpha$ , temos:

$$\cos \alpha = \frac{2}{5} \text{ e } 0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$\text{então } \sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = +\sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\text{e } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

C.255 Calcular  $\sin(\arccos(-\frac{3}{5}))$ .

C.256 Calcular  $\cotg(\arccos \frac{2}{7})$ .

C.257 (FEI-76) Sendo  $A$  do primeiro quadrante e  $\arcsen x = A$ , ache  $\arccos x$ .

C.258 Calcular  $\sin(\arccos \frac{5}{13} + \arcsen \frac{7}{25})$ .

**Solução**

Fazendo  $\arccos \frac{5}{13} = \alpha$ , temos:

$$\cos \alpha = \frac{5}{13} \text{ e } 0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$\text{então } \sin \alpha = + \sqrt{1 - (\frac{5}{13})^2} = \frac{12}{13}$$

Fazendo  $\arcsen \frac{7}{25} = \beta$ , temos:

$$\sin \beta = \frac{7}{25} \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{então } \cos \beta = + \sqrt{1 - (\frac{7}{25})^2} = \frac{24}{25}$$

Finalmente, temos:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{12}{13} \cdot \frac{24}{25} + \frac{7}{25} \cdot \frac{5}{13} = \frac{288 + 35}{325} = \frac{323}{325} \end{aligned}$$

C.259 Calcular:

a)  $\sin(\arccos \frac{3}{5} - \arccos \frac{5}{13})$

b)  $\cos(\arcsen \frac{7}{25} - \arccos \frac{12}{13})$

c)  $\tg(2 \cdot \arccos(-\frac{3}{5}))$

d)  $\cos(\frac{1}{2} \cdot \arccos \frac{7}{25})$

C.260 (MAPOFEI-72) Seja a função  $f(x) = \cos(2 \arccos x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

a) Determinar os valores de  $x$  tais que  $f(x) = 0$

b) Esboçar o gráfico de  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ .

## 97. Função arco-tangente

A função tangente, isto é,  $f: \{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \tg x$  é sobrejetora (pois  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$  e  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  tal que  $\tg x = y$ ) e não injetora (pois  $0 \neq \pi$  e  $\tg 0 = \tg \pi$ ).

Se considerarmos a função tangente restrita ao intervalo aberto  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  e com contradomínio  $\mathbb{R}$ , isto é,

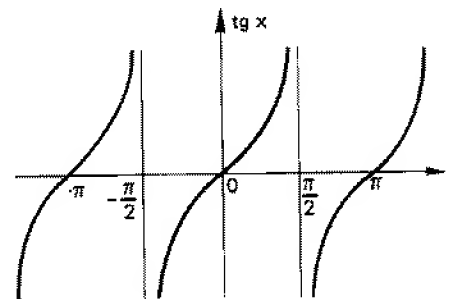
$$g: ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que  $g(x) = \tg x$ , notamos que:

1º)  $g$  também é sobrejetora;

2º)  $g$  é injetora pois no intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  a função tangente é crescente, então:

$$x_1, x_2 \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , x_1 \neq x_2 \Rightarrow \tg x_1 \neq \tg x_2$$



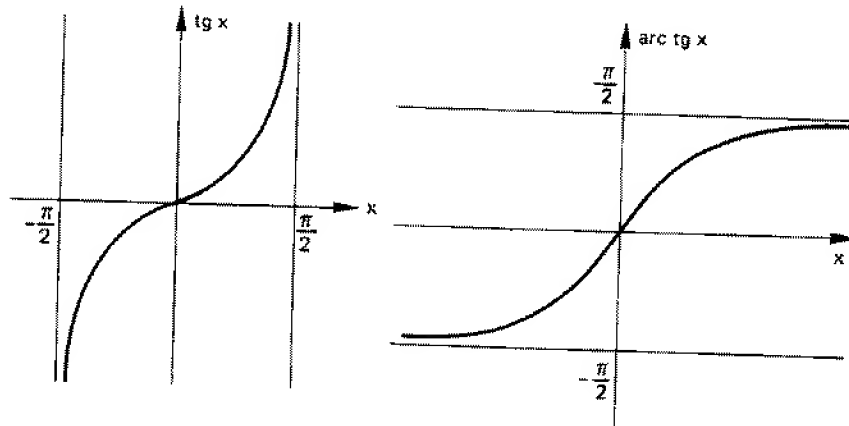
Deste modo a função  $g$  admite inversa e  $g^{-1}$  é denominada função arco-tangente. Notemos que  $g^{-1}$  tem domínio  $\mathbb{R}$ , contradomínio  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  e associa a cada  $x \in \mathbb{R}$  um  $y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  tal que  $y$  é um arco cuja tangente é  $x$  (indica-se  $y = \arctg x$ ). Temos, portanto, que:

$$y = \arctg x \iff \tg y = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Como de hábito vamos construir o gráfico de  $g^{-1}$  a partir de  $g$ .

$$g(x) = \operatorname{tg} x$$

$$g^{-1}(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$



## EXERCÍCIOS

C.261 Determinar  $\alpha$  tal que  $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1$ .

**Solução**

Temos:

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 \iff \operatorname{tg} \alpha = 1 \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{isto é, } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

C.262 Determinar os seguintes números:  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 0$ ,  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{3}$ ,  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (-1)$ , e  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (-\frac{\sqrt{3}}{3})$ .

C.263 Calcular  $\operatorname{sen}(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2})$ .

**Solução**

Fazendo  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} = \alpha$ , temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

então

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{1 + 2} = \frac{2}{3} \implies \operatorname{sen} \alpha = +\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

C.264 Calcular  $\cos(\operatorname{arc} \operatorname{tg}(-\frac{4}{3}))$ .

C.265 Calcular  $\operatorname{tg}(\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{3}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{5}{12})$ .

**Solução**

Fazendo  $\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{3}{5} = \alpha$ , temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5} \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \text{ então:}$$

$$\cos \alpha = +\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \text{ e } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Fazendo  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{5}{12} = \beta$ , temos  $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{12}$ .

Finalmente, temos:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{12}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{\frac{16}{48}}{\frac{63}{48}} = \frac{16}{63}$$

C.266 Calcular:

a)  $\operatorname{sen}(\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3)$

b)  $\cos(\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2})$

c)  $\operatorname{tg}(2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5})$

d)  $\cos(3 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{24}{7})$

C.267 Demonstrar a igualdade:

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{5}}{5} + \operatorname{arc} \cos \frac{3}{\sqrt{10}} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1$$

**Solução**

1) Fazamos  $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $\beta = \operatorname{arc} \cos \frac{3}{\sqrt{10}}$ ,  $\gamma = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1$ ,

então:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \implies 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \\ \cos \beta &= \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ e } 0 \leq \beta \leq \pi \implies 0 < \beta < \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \implies 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = 1 \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2} \implies \gamma = \frac{\pi}{4}$$

II) Calculemos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}} = \\ &= \frac{\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{20}}{5}} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{10}}{3}}}{1 - \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{20}}{5}} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{10}}{3}}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 = \operatorname{tg} \gamma \end{aligned}$$

III) Conclusão

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \gamma < \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg} \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta = \gamma$$

C.268 Provar as seguintes igualdades:

- a) (ITAUBA-77)  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$   
 b)  $\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{5}} + \operatorname{arc} \cos \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{4}$   
 c)  $\operatorname{arc} \cos \frac{3}{5} + \operatorname{arc} \cos \frac{12}{13} = \operatorname{arc} \cos \frac{16}{65}$   
 d)  $\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{24}{25} - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{3}{5} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3}{4}$

C.269 Provar que  $2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$ .

Solução

Fazendo  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} = \alpha$ , temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

Fazendo  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7} = \beta$ , temos:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{7} \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

Tendo em vista (1) e (2), para provar que  $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$  basta provar que  $\operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = 1$  pois  $0 < 2\alpha + \beta < \pi$ . Temos:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}} = \frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = 1$$

C.270 Provar as igualdades:

- a)  $2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{3} + \operatorname{arc} \cos \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$   
 b)  $3 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{4} + \operatorname{arc} \cos \frac{11}{16} = \frac{\pi}{2}$



Leonhard Euler nasceu em Basileia, Suíça, onde seu pai era ministro religioso e possuía alguns conhecimentos matemáticos.

Euler foi aluno de Jean Bernoulli e amigo de seus filhos Nicolaus e Daniel, recebendo ampla instrução em Teologia, Medicina, Astronomia, Física, Línguas orientais e Matemática.

Com o auxílio de Bernoulli entrou para a Academia de S. Petersburgo, fundada por Catarina I, ocupando um lugar na seção de Medicina e Fisiologia, e em 1730 passando à seção de Filosofia por ocasião da morte de Nicolaus e afastamento de Daniel. Tornando-se o principal matemático já aos vinte e seis anos, dedicou-se profundamente à pesquisa compondo uma quantidade inigualável de artigos, inclusive para a revista da Academia.

Em 1735 perdeu a visão do olho direito mas suas pesquisas continuaram intensas chegando a escrever até mesmo enquanto brincava com seus filhos.

Conquistou reputação internacional e recebeu menção honrosa na Academia das Ciências de Paris bem como vários prêmios em concursos.

Convidado por Frederico, o Grande, Euler passou 25 anos na Academia de Berlim, voltando à Rússia em 1766.

Euler ocupou-se de quase todos os ramos da Matemática Pura e Aplicada sendo o maior responsável pela linguagem e notações que usamos hoje; foi o primeiro a empregar a letra  $e$  como base do sistema de logaritmos naturais, a letra  $\pi$  para razão entre comprimento e diâmetro da circunferência e o símbolo  $i$  para  $\sqrt{-1}$ . Deve-se a ele também o uso de letras minúsculas designando lados do triângulo e maiúsculas para seus ângulos opostos; simbolizou logaritmo de  $x$  por  $\lg x$ , usou  $\Sigma$  para indicar adição e  $f(x)$  para função de  $x$ , além de outras notações em Geometria, Álgebra, Trigonometria e Análise.

Euler reuniu Cálculo Diferencial e Método dos Fluxos num só ramo mais geral da Matemática que é a Análise, o estudo dos processos infinitos, surgindo assim sua principal obra, em 1748, a "*Introdução à Análise Infinita*", baseando-se fundamentalmente em funções, tanto algébricas como transcendentais elementares (trigonométricas, logarítmicas, trigonométricas inversas e exponenciais).

Foi o primeiro a tratar dos logaritmos como expoentes e com idéia correta sobre logaritmo de números negativos.

Muito interessado no estudo de séries infinitas, obteve notáveis resultados que o levaram a relacionar Análise com Teoria dos Números, e para a Geometria, Euler dedicou um Apêndice da "*Introdução*" onde dá a representação da Geometria Analítica no espaço.

Euler escreveu em todos os níveis, em várias línguas, publicando mais de 500 livros e artigos.

Os dezessete últimos anos de sua vida passou em total cegueira mas o fluxo de suas pesquisas e publicações não diminuiu, escrevendo com giz em grandes quadros-negros ou ditando para seus filhos.

Manteve sua mente poderosa até os 76 anos quando morreu.

Euler foi descrito pelos matemáticos da época como sendo a própria "Análise encarnada".

## CAPÍTULO VIII

## INEQUAÇÕES

## I. INEQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

98. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções trigonométricas de variável  $x$ . Resolver a inequação  $f(x) < g(x)$  significa obter o conjunto  $S$ , denominado conjunto-solução ou conjunto-verdade, dos números  $r$  para os quais  $f(r) < g(r)$  é uma sentença verdadeira.

Quase todas as inequações trigonométricas podem ser reduzidas a inequações de um dos seguintes seis tipos:

$$1^a) \quad \sin x > m$$

$$2^a) \quad \sin x < m$$

$$3^a) \quad \cos x > m$$

$$4^a) \quad \cos x < m$$

$$5^a) \quad \operatorname{tg} x > m$$

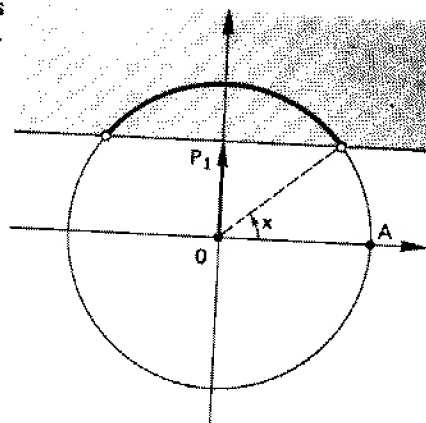
$$6^a) \quad \operatorname{tg} x < m$$

onde  $m$  é um número real dado. Por esse motivo, estas seis são denominadas inequações fundamentais. Assim, é necessário saber resolver as inequações fundamentais para poder resolver outras inequações trigonométricas.

## II. RESOLUÇÃO DE $\sin x > m$

99. Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto  $P_1$  tal que  $\overline{OP_1} = m$ . Traçamos por  $P_1$  a reta  $r$  perpendicular ao eixo. As imagens dos reais  $x$  tais que  $\sin x > m$  estão na intersecção do ciclo com o semi-plano situado acima de  $r$ .

Finalmente, descrevemos os intervalos aos quais  $x$  pode pertencer, tomando o cuidado de partir de  $A$  e percorrer o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta.



### 100. Exemplo

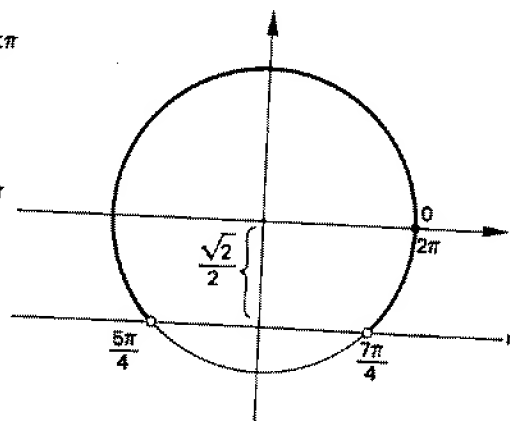
Resolver a inequação  $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

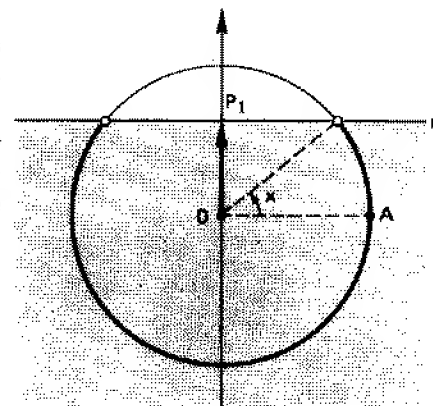


Notemos que escrever  $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$  estaria errado pois, como  $\frac{7\pi}{4} > \frac{5\pi}{4}$ , não existe  $x$  algum neste intervalo.

## III. RESOLUÇÃO DE $\sin x < m$

101. Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto  $P_1$  tal que  $\overline{OP_1} = m$ . Traçamos por  $P_1$  a reta  $r$  perpendicular ao eixo. As imagens dos reais  $x$  tais que  $\sin x < m$  estão na intersecção do ciclo com o semi-plano situado abaixo de  $r$ .

Finalmente, partindo de  $A$  e percorrendo o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



### 102. Exemplo

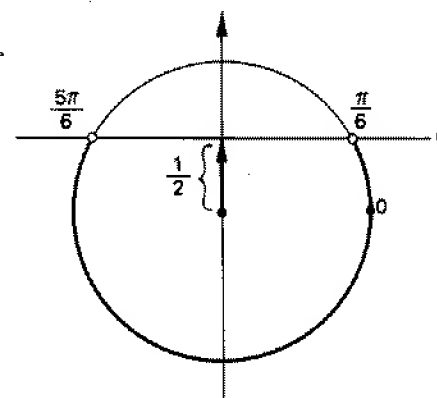
Resolver a inequação  $\sin x < \frac{1}{2}$ .

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



### EXERCÍCIOS

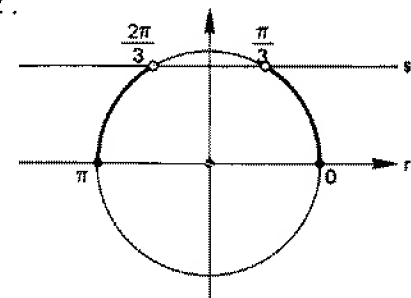
C.271 Resolver a inequação  $0 \leq \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Solução

A imagem de  $x$  deve ficar na intersecção do ciclo com a faixa do plano compreendida entre  $r$  e  $s$ . Temos, então:

$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou  $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi$



C.272 Resolver a inequação  $\sin x \geq 0$ .

C.273 Resolver a inequação  $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

C.274 Resolver a inequação  $-\frac{1}{2} \leq \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

C.275 Resolver a inequação  $|\sin x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Solução**

$$|\sin x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

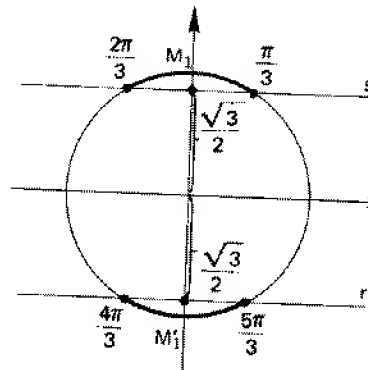
$$\text{ou } \sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A imagem de  $x$  deve ficar na intersecção do ciclo com o semi-plano situado abaixo de  $r$  ou com o semi-plano situado acima de  $s$ .

Assim, temos:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou}$$

$$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$



C.276 Resolver a inequação  $|\sin x| \leq \frac{1}{2}$ .

C.227 Resolver a inequação  $|\sin x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

C.278 Resolver a inequação  $2 \sin^2 x < \sin x$ .

**Solução**

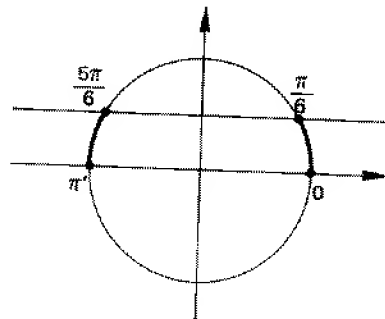
$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x < \sin x &\iff \\ \iff 2 \sin^2 x - \sin x < 0 &\iff \\ \iff 0 < \sin x < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Examinando o ciclo trigonométrico, obtemos:

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$



C.279 Resolver a inequação  $4 \sin^2 x \geq 1$ .

C.280 Determinar  $x \in [0, 2\pi]$  tal que  $\sin 2x > 0$ .

**Solução**

Fazendo  $2x = y$ , temos a inequação  $\sin y > 0$ .

Examinando o ciclo, vem

$$2k\pi < y < \pi + 2k\pi$$

Como  $x = \frac{y}{2}$ , resulta:

$$k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Mas  $x \in [0, 2\pi]$ , então só interessam as soluções particulares em que  $k = 0$  ou  $1$ :

$$k = 0 \implies 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

ou

$$k = 1 \implies \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

C.281 Resolver a inequação  $\sin 2x > \frac{1}{2}$  supondo  $x \in [0, 2\pi]$ .

C.282 Resolver a inequação  $\sin 3x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  supondo  $x \in [0, 2\pi]$ .

C.283 Resolver a inequação  $\frac{1}{4} \leq \sin x + \cos x < \frac{1}{2}$  supondo  $x \in [0, 2\pi]$ .

C.284 Resolver a inequação  $3^{2 \cdot \sin x - 1} \geq 1$  supondo  $x \in [0, \pi]$ .

C.285 (MAPOFEI-72)

a) Para quais valores de  $x$  existe  $\log_2(2 \sin x - 1)$ ?

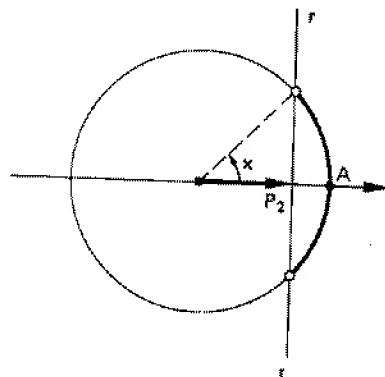
b) Resolver a equação

$$\log_2(2 \sin x - 1) = \log_4(3 \sin^2 x - 4 \sin x + 2).$$

#### IV. RESOLUÇÃO DE $\cos x > m$

103. Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto  $P_2$  tal que  $\overline{OP_2} = m$ . Traçamos por  $P_2$  a reta  $r$  perpendicular ao eixo. As imagens dos reais  $x$  tais que  $\cos x > m$  estão na intersecção do ciclo com o semi-plano situado à direita de  $r$ .

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



#### 104. Exemplo

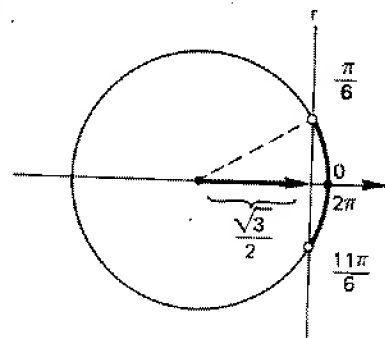
Resolver a inequação  $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Procedendo conforme foi indicado temos:

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou

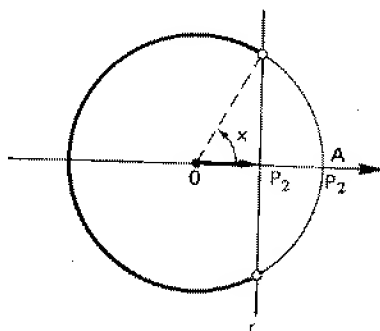
$$\frac{11\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



#### V. RESOLUÇÃO DE $\cos x < m$

105. Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto  $P_2$  tal que  $\overline{OP_2} = m$ . Traçamos por  $P_2$  a reta  $r$  perpendicular ao eixo. As imagens dos reais  $x$  tais que  $\cos x < m$  estão na intersecção do ciclo com o semi-plano situado à esquerda de  $r$ .

Completamos o problema descrevendo os intervalos que convêm.



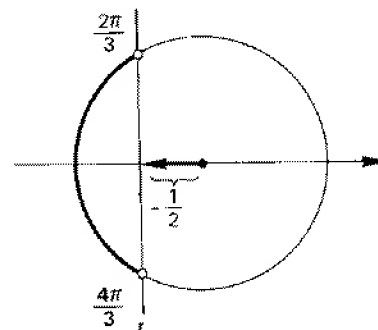
#### 106. Exemplo

Resolver a inequação

$$\cos x < -\frac{1}{2}.$$

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi.$$



#### EXERCÍCIOS

C.286 Resolver a inequação  $-\frac{3}{2} \leq \cos x \leq 0$ , para  $x \in [0, 2\pi]$ .

#### Solução

A imagem de  $x$  deve ficar na intersecção do ciclo com a faixa do plano compreendida entre  $r$  e  $s$ . Temos, então:

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}.$$

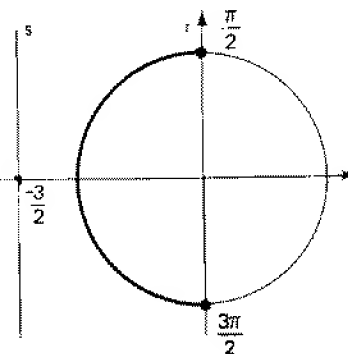
C.287 Resolver a inequação  $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ .

C.288 Resolver a inequação  $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

C.289 Resolver a inequação  $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$ .

C.290 Resolver a inequação  $|\cos x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

C.291 Resolver a inequação  $|\cos x| > \frac{5}{3}$ .



C.292 Resolver a inequação  $\cos 2x + \cos x \leq -1$ .

**Solução**

$$\begin{aligned}\cos 2x + \cos x &\leq -1 \iff (2 \cos^2 x - 1) + \cos x \leq -1 \iff \\ &\iff 2 \cos^2 x + \cos x \leq 0 \iff -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 0\end{aligned}$$

Examinando o ciclo trigonométrico, obtemos:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

C.293 Resolver a inequação  $4 \cos^2 x < 3$ .

C.294 Resolver a inequação  $\cos 2x \geq \cos x$ .

C.295 Resolver a inequação  $\sin x + \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Solução**

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \\ &\iff 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Fazendo  $x - \frac{\pi}{4} = y$ , temos a inequação  $\cos y \geq \frac{1}{2}$ . Examinando o ciclo, vem:

$$2k\pi \leq y \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{5\pi}{3} + 2k\pi \leq y < 2\pi + 2k\pi$$

isto é:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \leq x < \frac{9\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{pois } x = y + \frac{\pi}{4}.$$

C.296 Resolver a inequação  $\sin x + \cos x < 1$ .

C.297 Determinar  $x \in [0, 2\pi]$  tal que  $\cos 3x \leq \frac{1}{2}$ .

**Solução**

Fazendo  $3x = y$ , temos a inequação  $\cos y \leq \frac{1}{2}$ . Examinando o ciclo, vem:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq y \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

Como  $x = \frac{y}{3}$ , resulta:

$$\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$$

Mas  $x \in [0, 2\pi]$ , então só interessam as soluções particulares em que  $k = 0$  ou 1 ou 2:

$$k = 0 \implies \frac{\pi}{9} \leq x \leq \frac{5\pi}{9}$$

ou

$$k = 1 \implies \frac{7\pi}{9} \leq x \leq \frac{11\pi}{9}$$

ou

$$k = 2 \implies \frac{13\pi}{9} \leq x \leq \frac{17\pi}{9}$$

C.298 Resolver a inequação  $\cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  supondo  $x \in [0, 2\pi]$ .

C.299 Resolver a inequação  $\cos 4x > -\frac{1}{2}$  supondo  $x \in [0, 2\pi]$ .

C.300 Determinar  $x \in [0, 2\pi]$  tal que  $\frac{\cos x}{\cos 2x} \leq 1$ .

**Solução**

i) Fazendo  $\cos x = y$  e lembrando que  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ , temos:

$$\frac{y}{2y^2 - 1} \leq 1 \iff \frac{y}{2y^2 - 1} - 1 \leq 0 \iff \frac{2y^2 - y - 1}{2y^2 - 1} \geq 0$$

ii) Fazendo o quadro de sinais:

	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$2y^2 - y - 1$	+	+	-	-
$2y^2 - 1$	+	-	-	+
$\frac{2y^2 - y - 1}{2y^2 - 1}$	+	-	+	+

concluimos que o quociente é positivo para  $y < -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ou  $-\frac{1}{2} < y < \frac{\sqrt{2}}{2}$  ou  $y \geq 1$ .

III) Examinando o ciclo trigonométrico, para  $0 \leq x \leq 2\pi$ , temos:

$$\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$$

$$-\frac{1}{2} \leq \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \begin{cases} \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$$\cos x \geq 1 \implies x = 0 \text{ ou } 2\pi$$

portanto:

$$S = \{x \mid x = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{7\pi}{4} \text{ ou } x = 2\pi\}$$

C.301 Resolver a inequação  $\frac{2 \cos^2 x + \cos x - 1}{\cos x - 1} > 0$  supondo  $x \in [0, \pi]$ .

C.302 Resolver a inequação  $\frac{\cos 2x + \sin x + 1}{\cos 2x} \geq 2$  supondo  $x \in [0, \pi]$ .

C.303 Resolver a inequação  $2^{\cos 2x} \leq \sqrt{2}$  supondo  $x \in [0, \pi]$ .

C.304 Determinar o domínio da função real  $f$  dada por  $f(x) = \sqrt{\frac{\cos 2x}{\cos x}}$ .

**Solução**

I) Devemos ter  $\frac{\cos 2x}{\cos x} \geq 0$

II) Fazendo  $\cos x = y$ , temos:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x} \geq 0 \iff \frac{2y^2 - 1}{y} \geq 0$$

III) Fazendo o quadro de sinais:

	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$2y^2 - 1$	+	-	-	+
$y$	-	-	+	+
$\frac{2y^2 - 1}{y}$	-	+	-	+

concluímos que o quociente é positivo para

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y < 0 \text{ ou } y \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

IV) Examinando o ciclo trigonométrico, temos:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x < 0 \iff \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \begin{cases} 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi \end{cases}$$

C.305 (MACK-70) Determine no conjunto dos números reais o domínio de

$$y = \sqrt{\frac{4 \cdot \sin^2 x - 1}{\cos x}}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

C.306 Para que valores de  $x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ , está definida a função

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sin 2x - 2}{\cos 2x + 3 \cos x - 1}} ?$$

C.307 (MACK-71) É dada a equação

$$(2 \cos^2 \alpha) x^2 - (4 \cos \alpha) x + (4 \cos^2 \alpha - 1) = 0$$

sendo  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .

a) Para que valores de  $\alpha$  a equação tem soluções reais?

b) Para que valores de  $\alpha$  a equação admite raízes reais negativas?

C.308 Para que valores de  $x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ , verifica-se a desigualdade:

$$\log_{\cos x} (1 + 2 \cos x) + \log_{\cos x} (1 + \cos x) > 1 ?$$

C.309 Que valores de  $x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$  verificam a inequação  $\sqrt{1 - \cos x} < \sin x$ ?

C.310 (MACK-72) Resolver, separadamente, cada um dos sistemas abaixo:

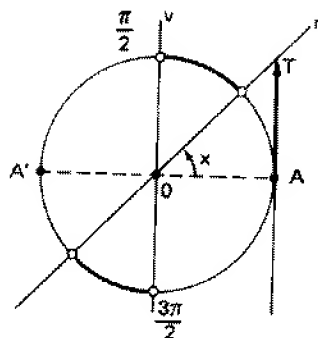
a)  $\begin{cases} \sin x > \frac{1}{2} \\ \cos x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

b)  $\begin{cases} \cos(\sin x) > 0 \\ \sin(\cos x) < 0 \end{cases}$

## VI. RESOLUÇÃO OE $\operatorname{tg} x > m$

107. Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que  $\overrightarrow{AT} = m$ . Traçamos a reta  $r = \overleftrightarrow{OT}$ . As imagens dos reais x tais que  $\operatorname{tg} x > m$  estão na intersecção do ciclo com o ângulo  $r\hat{O}v$ .

Para completar descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



### 108 Exemplo

Resolver a inequação  $\operatorname{tg} x > 1$ .

Procedendo conforme foi indicado, temos:

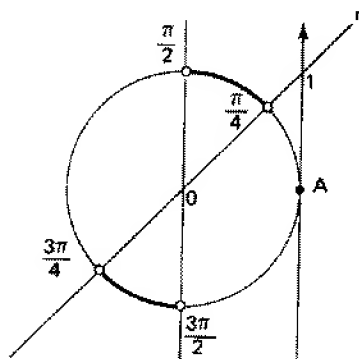
$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

que podem ser resumidos em

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$



### 110. Exemplo

Resolver a inequação  $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$ .

Procedendo conforme foi indicado, temos:

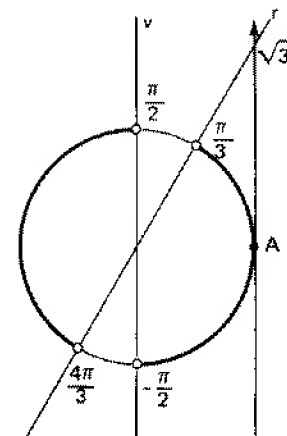
$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



## EXERCÍCIOS

C.311 Resolver a inequação  $|\operatorname{tg} x| \leq 1$ .

**Solução**

$$|\operatorname{tg} x| \leq 1 \iff -1 \leq \operatorname{tg} x \leq 1$$

A imagem de x deve ficar na intersecção do ciclo com o ângulo  $r\hat{O}s$ . Temos, então:

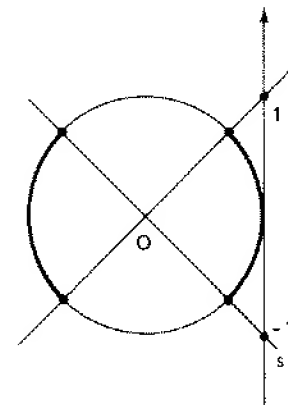
$$0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi$$



C.312 Resolver a inequação  $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$ .

C.313 Resolver a inequação  $\operatorname{tg} x \leq 0$ .

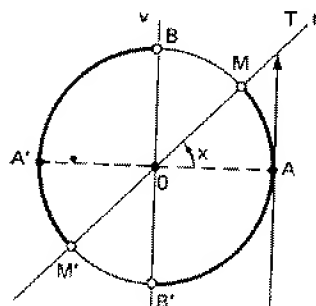
C.314 Resolver a inequação  $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

C.315 Resolver a inequação  $|\operatorname{tg} x| \geq \sqrt{3}$ .

## VII. RESOLUÇÃO DE $\operatorname{tg} x < m$

109. Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que  $\overrightarrow{AT} = m$ . Traçamos a reta  $r = \overleftrightarrow{OT}$ . As imagens dos reais x tais que  $\operatorname{tg} x < m$  estão na intersecção do ciclo com o ângulo  $v\hat{O}r$ .

Para completar descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



C.316 Determinar  $x \in [0, 2\pi]$  tal que  $1 \leq \operatorname{tg} 2x < \sqrt{3}$ .

**Solução**

Fazendo  $2x = y$ , temos a inequação  $1 \leq \operatorname{tg} y < \sqrt{3}$ .

Examinando o ciclo, vem:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq y < \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Como  $x = \frac{y}{2}$ , resulta:

$$\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

Mas  $x \in [0, 2\pi]$ , então só interessam as soluções particulares em que  $k = 0$  ou 1 ou 2 ou 3:

$$k = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{8} \leq x < \frac{\pi}{6}$$

ou

$$k = 1 \Rightarrow \frac{5\pi}{8} \leq x < \frac{2\pi}{3}$$

ou

$$k = 2 \Rightarrow \frac{9\pi}{8} \leq x < \frac{7\pi}{6}$$

ou

$$k = 3 \Rightarrow \frac{13\pi}{8} \leq x < \frac{5\pi}{3}$$

C.317 Resolver a inequação  $\operatorname{tg} 2x \geq -\sqrt{3}$  supondo  $x \in [0, 2\pi]$ .

C.318 Resolver a inequação  $\operatorname{tg}^2 2x \leq \operatorname{tg} 2x$  supondo  $x \in [0, 2\pi]$ .

C.319 Resolver a inequação  $\operatorname{tg}^2 2x < 3$  supondo  $x \in [0, 2\pi]$ .

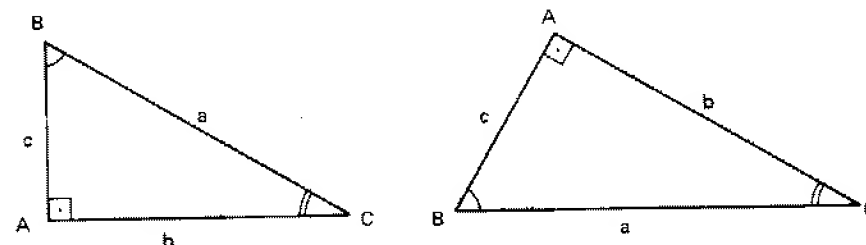
C.320 (MAPOFEI-75) Resolver a inequação:  $\operatorname{sen} x > \cos x$ , para  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

## CAPÍTULO IX

# TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

## I. ELEMENTOS PRINCIPAIS

111. Sabemos que um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos é reto.



Como é habitual, vamos utilizar a notação seguinte para os elementos de um triângulo ABC:

*lados:* AB, BC, AC

*ângulos internos:*  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{ACB}$

*medidas dos lados:*  $a$  = medida de BC

$b$  = medida de AC

$c$  = medida de AB

*medidas dos ângulos:*  $\widehat{A}$  = medida de  $\widehat{BAC}$

$\widehat{B}$  = medida de  $\widehat{ABC}$

$\widehat{C}$  = medida de  $\widehat{ACB}$



Sempre que tratarmos de um triângulo ABC retângulo, daqui por diante estaremos pensando que o ângulo interno A mede  $90^\circ$ .

Sabemos que o lado BC, oposto ao ângulo reto, é chamado *hipotenusa* e os lados AB e AC, adjacentes ao ângulo reto, são chamados *catetos* do triângulo ABC.

Para simplificar nossa linguagem diremos que o triângulo ABC tem hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ , isto é, vamos confundir BC, AC, AB com suas respectivas medidas  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Analogamente, diremos que os ângulos internos do triângulo são  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ .

112. Neste capítulo vamos desenvolver uma teoria geométrico-trigonométrica que permite calcular as medidas de segmentos ou ângulos de um triângulo retângulo, partindo de um número mínimo de dados.

## II. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

113. Provemos algumas relações notáveis entre segmentos de um mesmo triângulo retângulo.

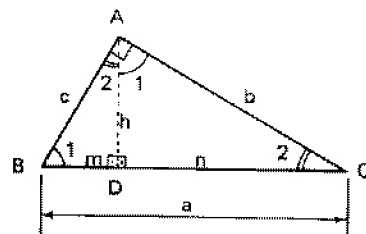
Se tomarmos um triângulo ABC retângulo e conduzirmos AD perpendicular a BC, com D em BC, obtemos:

AD = altura relativa à hipotenusa (medida:  $h$ )

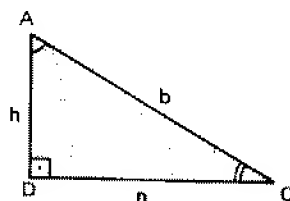
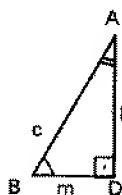
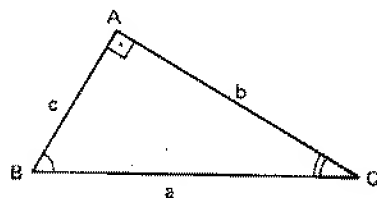
BD = projeção do cateto AB sobre a hipotenusa (medida:  $m$ )

CD = projeção do cateto AC sobre a hipotenusa (medida:  $n$ )

$\hat{B} \equiv \hat{1}$  e  $\hat{C} \equiv \hat{2}$  pois  $AB \perp AC$  e  $BC \perp AD$



Na figura anterior podemos observar três triângulos  $\triangle ABC$ ,  $\triangle DBA$  e  $\triangle DAC$  que são semelhantes por apresentarem ângulos dois a dois congruentes.



Temos, então, as seguintes propriedades:

$$1^a) \triangle ABC \sim \triangle DBA \implies \frac{a}{c} = \frac{c}{m}$$

$$\boxed{c^2 = am}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC \implies \frac{a}{b} = \frac{b}{n}$$

$$\boxed{b^2 = an}$$

isto é, cada cateto é média geométrica entre a hipotenusa e a projeção dele sobre ela.

$$2^a) \triangle ABC \sim \triangle DBA \implies \frac{a}{c} = \frac{b}{h}$$

$$\boxed{bc = ah}$$

isto é, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

$$3^a) \triangle DBA \sim \triangle DAC \implies \frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$

$$\boxed{h^2 = mn}$$

isto é, a altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre os segmentos que determina na hipotenuse.

### 4^a) Teorema de Pitágoras

Somando membro a membro as duas primeiras relações, temos:

$$\left. \begin{array}{l} c^2 = am \\ b^2 = an \end{array} \right\} \implies b^2 + c^2 = an + am = a(n + m) = aa = a^2$$

$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$$

isto é, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

114. Outra propriedade notável dos triângulos retângulos pode ser vista se tomarmos os pontos médios dos lados (M, N, O) e ligarmos conforme a figura. O polígono AMON é um retângulo, portanto:

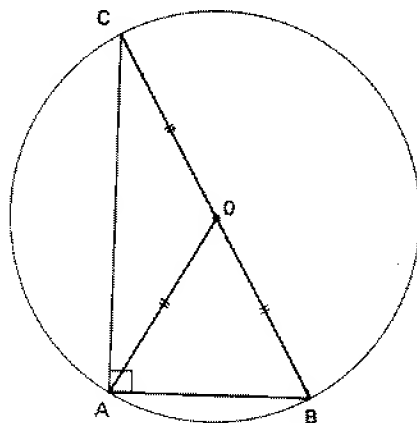
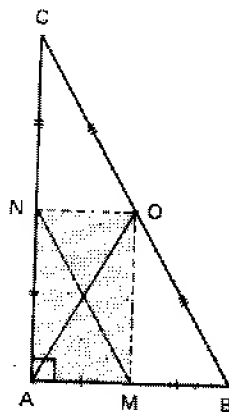
$$OA \equiv MN \equiv \frac{BC}{2}$$

isto é, a mediana relativa à hipotenusa é igual à metade desta.

Como consequência temos que

$$OA \equiv OB \equiv OC = \frac{a}{2}$$

e, portanto, todo triângulo retângulo pode ser inscrito em uma circunferência cujo diâmetro é a hipotenusa.



## EXERCÍCIOS

C.321 Calcular os elementos indicados na figura ao lado.

### Solução

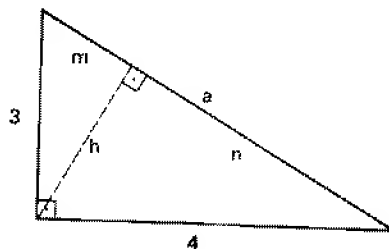
Sendo  $c = 3$  e  $b = 4$ , vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow a = 5$$

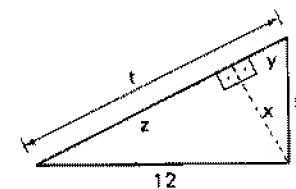
$$h = \frac{b \cdot c}{a} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}$$

$$m = \frac{c^2}{a} = \frac{9}{5}$$

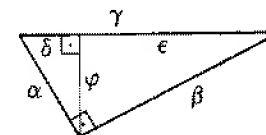
$$n = \frac{b^2}{a} = \frac{16}{5}$$



C.322 Calcular os elementos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  na figura ao lado.



C.323 Escrever 6 relações métricas envolvendo elementos da figura ao lado.



C.324 Calcular a área de um triângulo retângulo em que as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem, respectivamente, 4 e 9.

C.325 Calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo de perímetro 56 e altura  $\frac{168}{25}$ .

C.326 Um triângulo isósceles ABC tem base  $a = 12$  e está inscrito numa circunferência de diâmetro  $2R = 20$ . Calcular as medidas dos lados  $b$  e  $c$  do triângulo.

### Solução

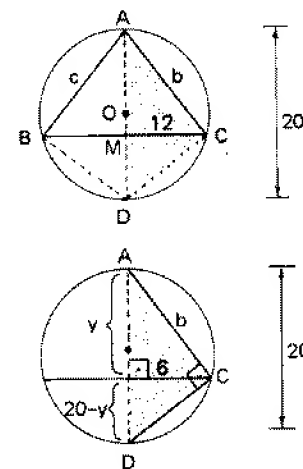
Ligando o vértice A ao centro O da circunferência, obtemos uma reta que corta a circunferência em D. Notemos que o segmento AD é diâmetro. Notemos ainda que AD é mediatriz do segmento BC, portanto  $AD \perp BC$  e  $BM = MC$ . Destacando o triângulo ADC, temos:

$$6^2 = y(20 - y) \Rightarrow y^2 - 20y + 36 = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = 18$$

então:

$$b^2 = 6^2 + y^2 \Rightarrow b^2 = 40 \text{ ou } b^2 = 360$$

$$\text{Resposta: } b = c = 2\sqrt{10} \text{ ou } b = c = 6\sqrt{10}$$



C.327 Calcular a altura de um triângulo isósceles conhecendo o raio  $R$  da circunferência circunscrita e a base  $a$ . Dados:  $R = 5$  e  $a = 8$ .

C.328 Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo isósceles de base 6 tendo outro lado medindo  $\sqrt{90}$ .

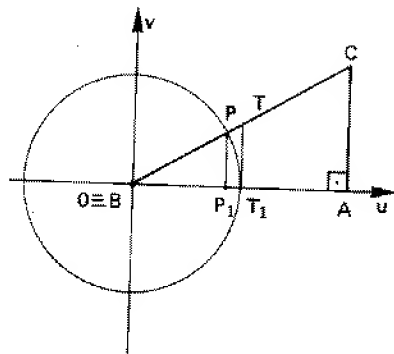
C.329 Um ponto P dista  $d = 13$  do centro O de uma circunferência de raio  $R = 5$ . Se traçarmos por P uma reta tangente à circunferência no ponto T, qual a medida do segmento PT?

C.330 Calcular o lado de um octógono regular inscrito em uma circunferência de raio  $R$ .

### III. PROPRIEDADES TRIGONOMÉTRICAS

115. Vamos provar as três propriedades que relacionam as medidas dos lados e as dos ângulos de um triângulo retângulo ABC.

Para isso vamos considerar uma circunferência de raio unitário e centro no vértice B e vamos fixar um sistema uOv de referência como mostra a figura.



1ª)  $\triangle BPP_1 \sim \triangle BCA$ , então

$$\frac{P_1P}{BP} = \frac{CA}{BC} \implies \frac{\sin \hat{B}}{1} = \frac{b}{a} \implies \boxed{\sin \hat{B} = \frac{b}{a}}$$

isto é, o seno de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto ao ângulo pela hipotenusa.

2ª)  $\triangle BPP_1 \sim \triangle BCA$ , então

$$\frac{BP_1}{BP} = \frac{BA}{BC} \implies \frac{\cos \hat{B}}{1} = \frac{c}{a} \implies \boxed{\cos \hat{B} = \frac{c}{a}}$$

isto é, o cosseno de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto adjacente ao ângulo pela hipotenusa.

3ª)  $\triangle BTT_1 \sim \triangle BCA$ , então

$$\frac{T_1T}{OT_1} = \frac{AC}{OA} \implies \frac{\tan \hat{B}}{1} = \frac{b}{c} \implies \boxed{\tan \hat{B} = \frac{b}{c}}$$

isto é, a tangente de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto pelo cateto adjacente ao ângulo.

### 116. Observações

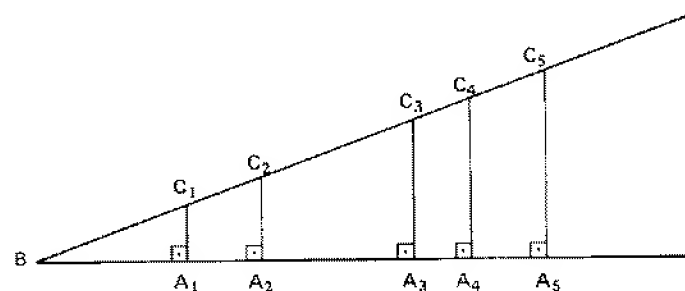
1ª) Notando que  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$  e  $\hat{A} = 90^\circ$ , decorre  $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ , isto é,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  são complementares, portanto:

$$\sin \hat{C} = \cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \hat{C} = \sin \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{1}{\tan \hat{B}} = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{cateto adjacente a } \hat{C}}$$

2ª) Decorre das três propriedades vistas que, sendo dado um ângulo agudo  $\hat{B}$ , se marcarmos sobre um de seus lados os pontos  $A_1, A_2, A_3, \dots$  e conduzirmos por eles as perpendiculares  $A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, \dots$  (conforme a figura abaixo), temos:



$$\sin \hat{B} = \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \dots$$

(fixado  $\hat{B}$ , o *cateto oposto a*  $\hat{B}$  e a *hipotenusa* são diretamente proporcionais).

$$\cos \hat{B} = \frac{AA_1}{BA_1} = \frac{AA_2}{BA_2} = \frac{AA_3}{BA_3} = \dots$$

(fixado  $\hat{B}$ , o *cateto adjacente a*  $\hat{B}$  e a *hipotenusa* são diretamente proporcionais).

$$\tan \hat{B} = \frac{A_1C_1}{AA_1} = \frac{A_2C_2}{AA_2} = \frac{A_3C_3}{AA_3} = \dots$$

(fixado  $\hat{B}$ , os *catetos oposto e adjacente a*  $\hat{B}$  são diretamente proporcionais).

## EXERCÍCIOS

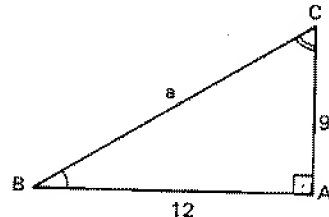
- C.331 Calcular os ângulos internos de um triângulo retângulo cujos catetos são  $b = 9$  e  $c = 12$ .

**Solução**

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Resposta:  $\hat{B} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3}{4}$  e  $\hat{C} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4}{3}$



- C.332 Calcular os lados de um triângulo retângulo sabendo que a altura relativa à hipotenusa é  $h = 4$  e um ângulo agudo é  $\hat{B} = 30^\circ$ .

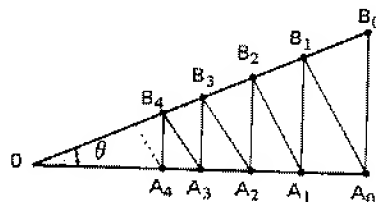
- C.333 Calcular os lados de um triângulo retângulo sabendo que a altura relativa à hipotenusa mede 4 e forma ângulo de  $15^\circ$  com o cateto  $b$ .

- C.334 Calcular os catetos de um triângulo retângulo ABC sabendo que está inscrito em uma circunferência de raio 3 e tem ângulos agudos tais que  $\hat{B} = 2\hat{C}$ .

- C.335 Calcular os ângulos agudos de um triângulo retângulo de hipotenusa 20, sabendo que a mediana relativa a um dos catetos mede 15.

- C.336 (FFCLUSP-66) Na figura ao lado, os ângulos

$\widehat{OA_iB_i}$  e  $\widehat{OB_{i+1}A_i}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  são retos. Quanto vale a soma dos segmentos  $A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, \dots$  em função de  $A_0B_0$  e de  $\theta$ ?



- C.337 Calcular o ângulo formado pela diagonal e o menor lado de um retângulo cujos lados estão na razão  $\frac{3}{4}$ .

- C.338 Calcular a área de um triângulo isósceles ABC cuja base é  $a = 8$ , sabendo que  $\hat{A} = 45^\circ$ .

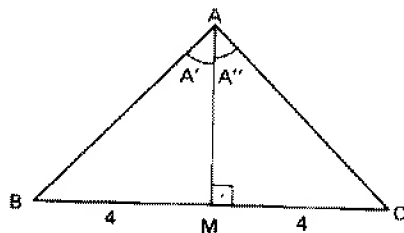
**Solução**

Traçando a altura AM, o triângulo ABC fica dividido em duas partes congruentes onde  $\hat{A}' = \hat{A}'' = 22^\circ 30'$ ,  $BM = MC = 4$ ,

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{MC}{AM} \implies$$

$$\implies AM = \frac{MC}{\operatorname{tg} 22^\circ 30'} = \frac{4\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

$$S = \frac{BC \cdot AM}{2} = \frac{16\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$



- C.339 Calcular a altura de um triângulo isósceles de perímetro  $2p = 36$ , sabendo que os ângulos adjacentes à base são iguais a  $\operatorname{arc} \cos \frac{2}{7}$ .

- C.340 Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo isósceles de base  $a = 8$  e ângulo oposto à base  $\hat{A} = 120^\circ$ .

- C.341 Um reta determina, sobre uma circunferência de raio 10, uma corda de comprimento 16. Qual é a medida do ângulo central sob o qual se vê a corda?

- C.342 Determinar o ângulo  $\hat{B}$  de um triângulo ABC retângulo em A sabendo que se verifica a relação  $\frac{1}{c} + \frac{2}{b} = \frac{\sqrt{5}}{h}$ , onde  $h$  é a altura relativa à hipotenusa.

- C.343 Em um triângulo ABC retângulo em A sabe-se que o ângulo agudo formado pelas medianas BM e CN é  $\hat{\theta} = 30^\circ$ . Calcular o ângulo  $\hat{C}$ .

- C.344 Em um triângulo ABC retângulo em A traçam-se as bissetrizes internas BB' e CC'. Sabendo que  $AB' = 1$  e  $AC' = 1$ , calcular o ângulo  $\hat{B}$  e a hipotenusa  $a$ .

- C.345 Calcular os ângulos agudos do triângulo retângulo de hipotenusa  $a = 13\text{m}$ , sabendo que o raio da circunferência inscrita é  $r = 2$ .

- C.346 Um observador vê um prédio, construído em terreno plano, sob um ângulo de  $60^\circ$ . Afastando-se do edifício mais 30 m, passa a ver o edifício sob ângulo de  $45^\circ$ . Qual é a altura do prédio?

**Solução**

No triângulo BXY, temos

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{\ell} \implies \ell = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

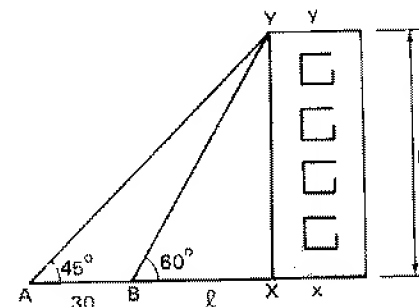
No triângulo AXY, temos:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{\ell + 30} \implies h = \ell + 30$$

então

$$h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 30 \implies h = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

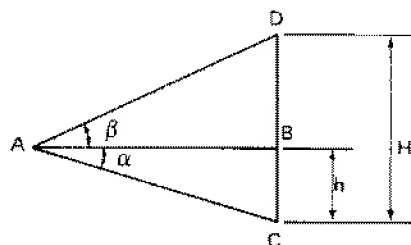
Resposta:  $\frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \text{ m}$



- C.347 (MAUÁ-68) Para medir a altura da torre vertical DE toma-se, no plano horizontal que passa pela sua base D, o segmento AB de comprimento 12 m e cujo ponto médio é C. Medem-se os ângulos DAE, DBE e DCE verificando-se que  $\hat{DAE} = \hat{DBE} = 45^\circ$  e  $\hat{DCE} = 60^\circ$ . Determinar a altura da torre.

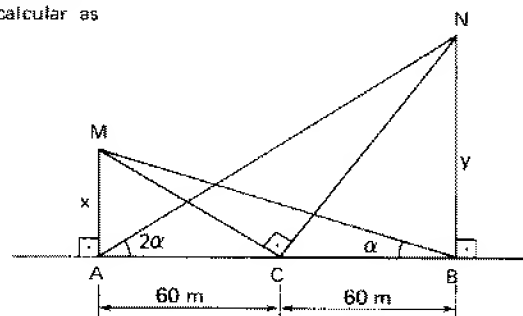
- C.348 Calcular a distância entre os parapeitos de duas janelas de um arranha-céu, conhecendo os ângulos ( $\alpha$  e  $\beta$ ) sobre os quais são observadas de um ponto O do solo, a distância  $d$  do prédio.

C.349 (MAUÁ-65) Para obter a altura  $H$  de uma chaminé, um engenheiro, com um aparelho especial, estabeleceu a horizontal  $AB$  e mediu os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  tendo a seguir medido  $BC = h$ . Determinar a altura do chaminé.



C.350 (MAUÁ-67) Um observador encontra-se na Via Anhanguera em trecho retilíneo, horizontal e situado no mesmo plano vertical que contém a torre de TV do canal 13, localizada no pico do Jaraguá. De duas posições  $A$  e  $B$  desse trecho retilíneo e distantes 60 m uma da outra, o observador vê a extremidade superior da torre, respectivamente, sob os ângulos de  $30^\circ$  e  $31^\circ 53'$ . O aparelho utilizado para medir os ângulos foi colocado a 1,50 m acima da pista de concreto que está a 721,50 m acima do nível do mar. Determinar a altura da torre em relação ao nível do mar. Dado:  $\text{tg } 31^\circ 53' = 0,62$ .

C.351 (LINS-66) Tendo em vista as relações descritas na figura ao lado calcular as distâncias  $x$  e  $y$ .



#### IV. RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

117. Resolver um triângulo retângulo significa calcular seus elementos principais, isto é, seus ângulos agudos ( $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ ) e seus lados ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ). Para obter esses elementos é necessário que sejam dadas duas informações sobre o triângulo, sendo uma delas, pelo menos, a medida de um segmento ligado ao triângulo (lado, mediana, mediatriz, etc).

Há cinco problemas clássicos de resolução de triângulos retângulos, que abordaremos com especial destaque.

##### 118. 1º problema

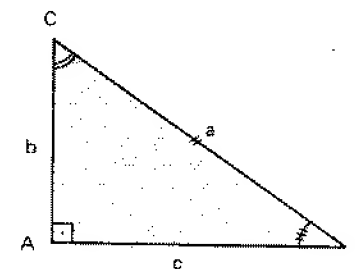
Resolver um triângulo retângulo, sendo dados: a hipotenusa ( $a$ ) e um dos ângulos agudos ( $\hat{B}$ ).

**Solução**

$$c = a \cdot \cos \hat{B}$$

$$b = a \cdot \sin \hat{B}$$

$$\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$$



##### 119. 2º problema

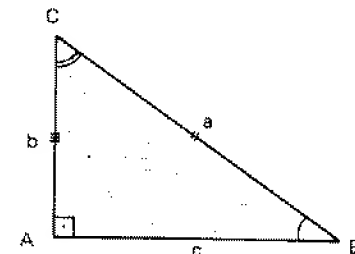
Resolver um triângulo retângulo, sendo dados: a hipotenusa ( $a$ ) e um dos catetos ( $b$ ).

**Solução**

$$c^2 = a^2 - b^2 \implies c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{b}{a} \implies \hat{B} = \arcsin \frac{b}{a}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{b}{a} \implies \hat{C} = \arccos \frac{b}{a}$$



##### 120. 3º problema

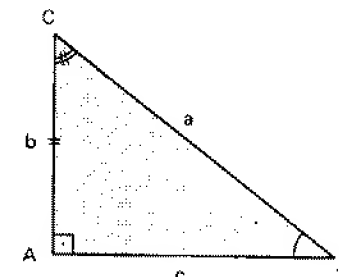
Resolver um triângulo retângulo, sendo dados: um cateto ( $b$ ) e o ângulo adjacente a ele ( $\hat{C}$ ).

**Solução**

$$c = b \cdot \text{tg } \hat{C}$$

$$a = \frac{b}{\cos \hat{C}}$$

$$\hat{B} = 90^\circ - \hat{C}$$



121. 4º problema

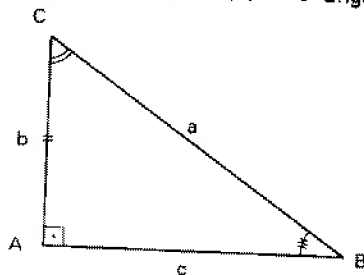
Resolver um triângulo retângulo, sendo dados um cateto ( $b$ ) e o ângulo oposto a ele ( $\hat{B}$ ).

Solução

$$c = \frac{b}{\operatorname{tg} \hat{B}}$$

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}}$$

$$\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$$



122. 5º problema

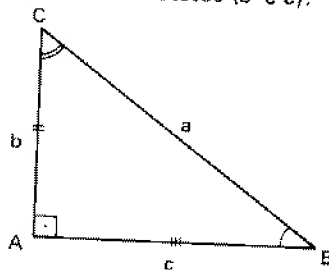
Resolver um triângulo retângulo, sendo dados os dois catetos ( $b$  e  $c$ ).

Solução

$$a^2 = b^2 + c^2 \implies a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} \implies \hat{B} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b} \implies \hat{C} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{b}$$



EXERCÍCIOS

C.352 Resolver um triângulo retângulo ABC conhecendo a medida da bissetriz interna  $S_B = 5$  e o ângulo  $\hat{C} = 30^\circ$ .

Solução

É imediato que  $\hat{B} = 60^\circ$  e  $\frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ$ .

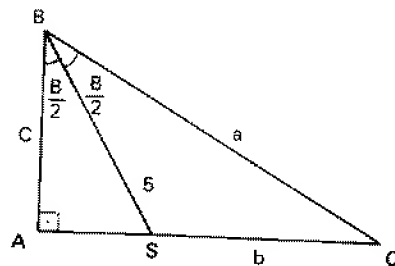
No triângulo retângulo ABS, temos:

$$c = 5 \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

então

$$a = \frac{c}{\cos \hat{B}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{3}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{75 - \frac{75}{4}} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}$$



C.353 Resolver um triângulo retângulo ABC sendo dados  $b = 3$  e  $a - c = \sqrt{3}$ .

C.354 Resolver um triângulo ABC retângulo em A sabendo que  $a + b = 18$  e  $a + c = 25$ .

C.355 Resolver um triângulo retângulo ABC sabendo que  $a = 4$  e a medida da bissetriz interna BE é  $S_B = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$ .

C.356 Resolver um triângulo retângulo conhecendo a altura  $h = 1$  relativa à hipotenusa e o perímetro  $2p = 2\sqrt{2} + 2$ .

C.357 Resolver um triângulo isósceles ABC sabendo que a altura relativa à base BC mede  $h = 24$  e o perímetro é  $2p = 64$ .

C.358 Resolver um triângulo retângulo ABC conhecendo o raio  $r = 2$  da circunferência inscrita e a altura  $h = \frac{60}{13}$  relativa à hipotenusa.

C.359 Resolver um triângulo retângulo ABC conhecendo a altura  $h = 2$  relativa à hipotenusa e o raio  $r' = 2\sqrt{2} + 2$  da circunferência ex-inscrita situada no ângulo reto.

# TRIÂNGULOS QUAISQUER

## I. PROPRIEDADES TRIGONOMÉTRICAS

### 123. Lei dos cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

*Demonstração*

1º) Seja ABC um triângulo com  $\hat{A} < 90^\circ$ .

No  $\triangle BCD$ , que é retângulo:

$$a^2 = n^2 + h^2 \quad (I)$$

No  $\triangle BAD$ , que é retângulo:

$$h^2 = c^2 - m^2 \quad (II)$$

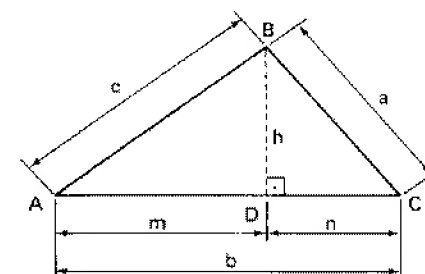
Temos também:

$$n = b - m \quad (III)$$

Levando (III) e (II) em (I):

$$a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2 \implies a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

Mas, no triângulo BAD:  $m = c \cdot \cos \hat{A}$ .



Logo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

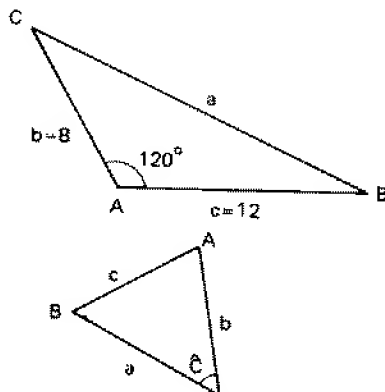
## EXERCÍCIOS

- C.360 Dois lados de um triângulo medem 8 m e 12 m e formam entre si um ângulo de  $120^\circ$ . Calcular o terceiro lado.

### Solução

Adotando a notação da figura ao lado e aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} = \\ &= 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ = \\ &= 64 + 144 + 96 = 304 \\ \text{então } a &= \sqrt{304} = 4\sqrt{19} \text{ m.} \end{aligned}$$



- C.361 (FEI-77) Calcular  $c$ , sabendo que

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= 3\sqrt{2} \\ \hat{C} &= 45^\circ \end{aligned}$$

- C.362 (MAPOFEI-76) Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8 m e 12 m e formam um ângulo de  $60^\circ$ . Calcular as diagonais.

- C.363 Se um paralelogramo tem lados medindo 4 m e 5 m e formando entre si um ângulo de  $30^\circ$ , qual é o ângulo que a diagonal maior forma com o menor lado?

- C.364 Um triângulo tem lados  $a = 10$  m,  $b = 13$  m e  $c = 15$  m. Calcular o ângulo  $\hat{A}$  do triângulo.

### Solução

Da lei dos cossenos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \implies \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

então:

$$\cos \hat{A} = \frac{13^2 + 15^2 - 10^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{169 + 225 - 100}{390} = \frac{294}{390} = \frac{49}{65}$$

$$\text{portanto } \hat{A} = \arccos \frac{49}{65}$$

- C.365 Calcular os três ângulos internos de um triângulo ABC sabendo que  $a = 2$ ,  $b = \sqrt{6}$  e  $c = \sqrt{3} + 1$ .

- C.366 Os lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de um triângulo ABC são diretamente proporcionais aos números 5, 7 e 9, respectivamente. Calcular o ângulo  $\hat{B}$ .

- C.367 (EPUSP-60) Demonstrar que se os lados de um triângulo têm medidas expressas por números racionais, então os cossenos dos ângulos internos também são números racionais.

- C.368 (EPUSP-56) Os lados de um triângulo são dados pelas expressões:

$$a = x^2 + x + 1, \quad b = 2x + 1 \quad \text{e} \quad c = x^2 - 1.$$

Demonstrar que um dos ângulos do triângulo mede  $120^\circ$ .

- C.369 Calcular o lado  $c$  de um triângulo ABC sendo dados  $\hat{A} = 120^\circ$ ,  $b = 1$  e  $\frac{a}{c} = 2$ .

- C.370 (EPUSP-60) Determinar os comprimentos dos lados de um triângulo que tem para vértices os centros dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo de lados 6, 8 e 10.

- C.371 (MAUÁ-67) Provar que num triângulo ABC retângulo em A, vale a relação  $(a - b)^2 = c^2 - 4ab \cdot \sin^2 \frac{\hat{C}}{2}$ .

- C.372 Qual é a relação entre os lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de um triângulo ABC para que se tenha:

- ABC retângulo?
- ABC acutângulo?
- ABC obtusângulo?

### Solução

Admitamos que  $a$  seja o maior lado do triângulo ABC, isto é,  $a \geq b$  e  $a \geq c$ . Sabemos da Geometria que ao maior lado opõe-se o maior ângulo do triângulo, portanto,  $\hat{A} \geq \hat{B}$  e  $\hat{A} \geq \hat{C}$ . Assim, temos:

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ é retângulo} &\iff \hat{A} = 90^\circ \\ \triangle ABC \text{ é acutângulo} &\iff 0^\circ < \hat{A} < 90^\circ \\ \triangle ABC \text{ é obtusângulo} &\iff 90^\circ < \hat{A} < 180^\circ \end{aligned}$$

Por outro lado, da lei dos cossenos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \implies \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Então, vem:

$$\begin{aligned} \text{a) } \hat{A} = 90^\circ &\iff \cos \hat{A} = 0 \iff b^2 + c^2 - a^2 = 0 \iff a^2 = b^2 + c^2 \\ \text{b) } 0^\circ < \hat{A} < 90^\circ &\iff \cos \hat{A} > 0 \iff b^2 + c^2 - a^2 > 0 \iff \\ &\iff a^2 < b^2 + c^2 \\ \text{c) } 90^\circ < \hat{A} < 180^\circ &\iff \cos \hat{A} < 0 \iff b^2 + c^2 - a^2 < 0 \iff \\ &\iff a^2 > b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Conclusão: um triângulo ABC é respectivamente retângulo, acutângulo ou obtusângulo, conforme o quadrado de seu maior lado seja igual, menor ou maior que a soma dos quadrados dos outros dois lados.

- C.373 Classificar segundo as medidas dos ângulos internos os triângulos cujos lados são:

- 17, 15, 8
- 5, 10, 6
- 6, 7, 8

- C.374 (EPUSP-61) Os lados de um triângulo obtusângulo estão em progressão geométrica crescente. Determinar a razão da progressão.



2º) Seja ABC um triângulo com  $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$

No  $\triangle BCD$ , que é retângulo

$$a^2 = n^2 + h^2 \quad (I)$$

No  $\triangle BAD$ , que é retângulo:

$$h^2 = c^2 - m^2 \quad (II)$$

Temos também:

$$n = b + m \quad (III)$$

Levando (III) e (II) em (I):

$$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2$$

$$\implies a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

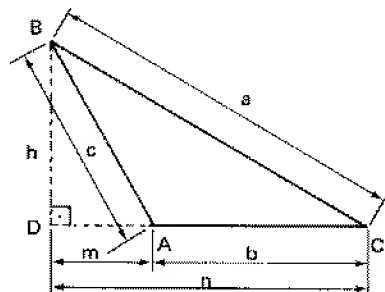
$$\text{Mas, no } \triangle BAD, m = c \cdot \cos(180^\circ - \hat{A}) \implies m = -c \cdot \cos \hat{A}.$$

Logo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

3º) Analogamente, podemos provar que:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C} \end{aligned}$$



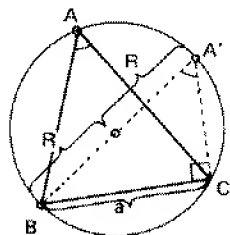
## 124. Lei dos senos

Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita.

### Demonstração

Seja ABC um triângulo qualquer, inscrito numa circunferência de raio R. Por um dos vértices do triângulo (B), tracemos o diâmetro correspondente  $BA'$  e liguemos  $A'$  com C.

Sabemos que  $\hat{A} = \hat{A}'$  por determinarmos na circunferência a mesma corda BC. O triângulo  $A'BC$  é retângulo em C por estar inscrito numa semi-circunferência.



Temos, então:

$$a = 2R \cdot \sin \hat{A}' \implies a = 2R \cdot \sin \hat{A} \implies \frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R$$

$$\text{Analogamente: } \frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R \text{ e } \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

Donde concluímos a tese:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

## EXERCÍCIOS

C.375 Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC em que  $a = 15$  cm e  $\hat{A} = 30^\circ$ .

### Solução

Da lei dos senos temos:

$$2R = \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{15}{\sin 30^\circ} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = 30 \text{ cm}$$

então  $R = 15$  cm.

C.376 Calcular os lados  $b$  e  $c$  de um triângulo ABC no qual  $a = 10$ ,  $\hat{B} = 30^\circ$  e  $\hat{C} = 45^\circ$ .

### Solução

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \implies \hat{A} = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \implies b = \frac{a \cdot \sin \hat{B}}{\sin \hat{A}} = \frac{10 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{20}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \implies c = \frac{a \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

C.377 (EPUSP-61) Quais são os ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  de um triângulo ABC para o qual  $\hat{A} = 15^\circ$ ,  $\sin \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $\sin \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ?

C.378 Calcular os ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  de um triângulo em que  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{3} + 1$  e  $\hat{A} = 15^\circ$ .

C.379 Em um triângulo ABC sabe-se que  $a = 2b$  e  $\hat{C} = 60^\circ$ . Calcular os outros dois ângulos.

C.380 Calcular os ângulos de um triângulo ABC sabendo que  $\frac{b}{c} = \frac{2}{\sqrt{3}}$  e  $\hat{C} = 2\hat{A}$ .

C.381 Calcular o lado  $c$  de um triângulo ABC em que  $a = 6$  m,  $b = 3$  m e  $\hat{A} = 3\hat{B}$ .

C.382 (MAPOFEI-71) São conhecidos os seguintes elementos de um triângulo ABC: o perímetro  $2p$  e os ângulos  $A = \alpha$ ,  $B = \beta$

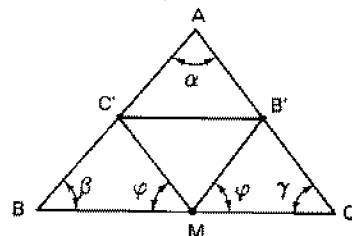
- Descrever um processo de construção do triângulo.
- Calcular os comprimentos de seus lados.

C.383 (EPUSP-62) Demonstrar que num quadrilátero ABCD onde  $\hat{A}\hat{D}\hat{B} = \hat{A}\hat{C}\hat{B}$ , tem-se:

$$AB = \frac{CD \cdot \sin \hat{A}\hat{D}\hat{B}}{\sin \hat{C}\hat{B}\hat{D}}$$

C.384 (MACK-66) O lado de um triângulo equilátero de lado 3 m é dividido em três partes iguais. Determinar os 3 ângulos que se obtêm unindo os pontos de divisão ao vértice oposto (as respostas devem ser dadas em termos de funções trigonométricas inversas).

C.385 (MACK-67) Do ponto médio dos lados AB e AC de um triângulo ABC traçam-se duas retas que se cortam num ponto M do terceiro lado BC e que formam com este lado ângulos iguais cujo valor é  $\varphi$ .



Prove que:  $\cotg \varphi = \frac{\sin \alpha}{2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}$

C.386 Um observador colocado a 25 m de um prédio vê o edifício sob certo ângulo. Afastando-se em linha reta mais 50 m, nota que o ângulo de visualização é metade do anterior. Qual é a altura do edifício?

#### Solução

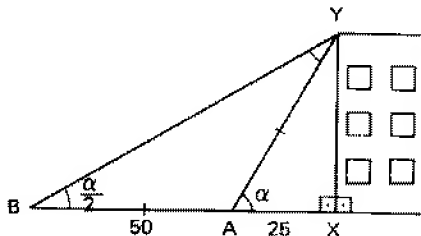
No triângulo ABY o ângulo externo  $\alpha$  é igual à soma dos internos não adjacentes  $\frac{\alpha}{2}$  e  $\hat{B}\hat{Y}\hat{A}$ , então:

$$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \hat{B}\hat{Y}\hat{A} \implies \hat{B}\hat{Y}\hat{A} = \frac{\alpha}{2}$$

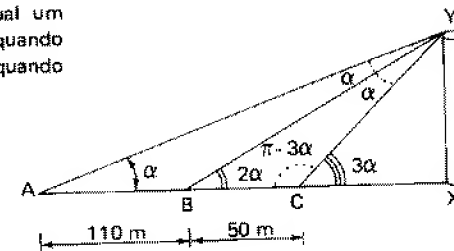
Assim o triângulo ABY é isósceles, portanto,  $AY = AB = 50$  m.

No triângulo retângulo AXY, temos:

$$XY^2 = AY^2 - AX^2 = 50^2 - 25^2 = 1875 \implies XY = 25\sqrt{3} \text{ m.}$$



C.387 (EPUSP-60) O ângulo sob o qual um observador vê uma torre duplica quando ele se aproxima 110 m e triplica quando se aproxima mais 50 m. Calcular a altura da torre.



C.388 (MAUÁ-66) Sendo  $a, b$  dois lados de um triângulo e  $\hat{A}, \hat{B}$  os ângulos opostos correspondentes, provar que:

$$a^2 \cdot \cos 2\hat{B} - b^2 \cdot \cos 2\hat{A} = a^2 - b^2$$

C.389 Calcular o ângulo  $\hat{B}$  ( $\hat{B} > 45^\circ$ ) de um triângulo retângulo ABC sabendo que  $a = 4$  e a medida da bissetriz interna AB é  $S_a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

C.390 Em um triângulo ABC retângulo em  $\hat{A}$  sabe-se que  $\frac{S_b \cdot S_c}{a^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$  onde  $S_b$  e  $S_c$  são as medidas das bissetrizes dos ângulos agudos. Calcular  $\hat{B}$ .

C.391 Calcular o ângulo  $\hat{B}$  de um triângulo isósceles ABC conhecendo a base  $a = 1$  e a bissetriz  $S_b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

C.392 (MAPOFEI-70) É dado um quarto de circunferência de centro O e raio  $r$ , limitado pelos pontos A e B (ver figura). Sendo P um ponto do arco AB, H projeção ortogonal de P sobre OB e  $2\alpha$  o ângulo  $\hat{A}\hat{O}\hat{P}$ .

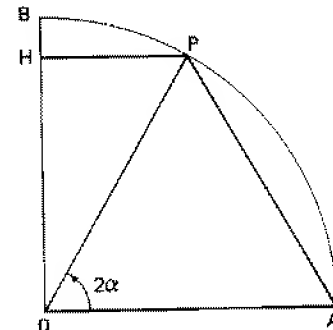
- mostrar que se  $AP - HP = r$ , então  $\cos \alpha = \tg \alpha$ ;
- verificada a condição do item anterior, determinar  $\sin \alpha$ ;
- sendo  $\alpha$  um ângulo compreendido entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , tal que

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1),$$

determiná-lo com a precisão de um segundo arco, utilizando a tabela abaixo.

ÂNGULO	SENO
$38^\circ 8'$	0,617494
$38^\circ 9'$	0,617722
$38^\circ 10'$	0,617951
$38^\circ 11'$	0,618180
$38^\circ 12'$	0,618408

Nota:  $\sqrt{5} \approx 2,236068$



## 125. Teorema

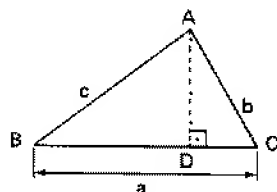
Em qualquer triângulo, valem as relações seguintes:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B} \\ b &= a \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{A} \\ c &= b \cdot \cos \hat{A} + a \cdot \cos \hat{B} \end{aligned}$$

### Demonstração

Vamos provar só a primeira delas:

1º) Seja ABC um triângulo com  $\hat{B} < 90^\circ$  e  $\hat{C} < 90^\circ$



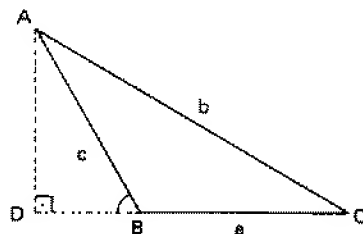
No  $\triangle ABD$ , que é retângulo:  $BD = c \cdot \cos \hat{B}$

No  $\triangle ADC$ , que é retângulo:  $DC = b \cdot \cos \hat{C}$

então:

$$a = BD + DC = c \cdot \cos \hat{B} + b \cdot \cos \hat{C}$$

2º) Seja ABC um triângulo com  $90^\circ < \hat{B} < 180^\circ$  ou  $90^\circ < \hat{C} < 180^\circ$



No  $\triangle ABD$ , que é retângulo:

$$BD = c \cdot \cos (180^\circ - \hat{B})$$

No  $\triangle ADC$ , que é retângulo:

$$DC = b \cdot \cos \hat{C}$$

então:

$$\begin{aligned} a &= DC - DB = b \cdot \cos \hat{C} - c \cdot \cos (180^\circ - \hat{B}) = \\ &= b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B} \end{aligned}$$

## 126. Teorema

Em qualquer triângulo, a área é igual ao semi-produto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo que eles formam.

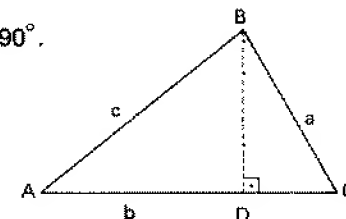
### Demonstração

1º) Seja ABC um triângulo com  $\hat{A} < 90^\circ$ .

No  $\triangle ADB$  que é retângulo, temos:

$$DB = c \cdot \sin \hat{A}$$

então:



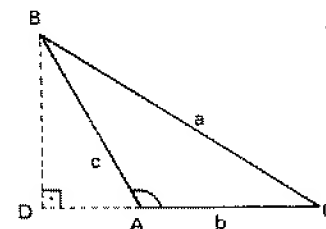
$$S = \frac{AC \cdot DB}{2} = \frac{bc}{2} \cdot \sin \hat{A}$$

2º) Seja ABC um triângulo com  $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$ .

No  $\triangle ABD$  que é retângulo, temos:

$$DB = c \cdot \sin (180^\circ - \hat{A}) = c \cdot \sin \hat{A}$$

então:



$$S = \frac{AC \cdot DB}{2} = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin \hat{A}$$

3º) Analogamente provamos que:

$$S = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin \hat{C}$$

$$S = \frac{a \cdot c}{2} \cdot \sin \hat{B}$$

## 127. Teorema

Em qualquer triângulo, a área é igual ao produto dos três lados dividido pelo quádruplo do raio da circunferência circunscrita.

### Demonstração

De acordo com a lei dos senos, temos:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R \implies \sin \hat{A} = \frac{a}{2R} \quad (1)$$

Pelo teorema anterior, temos:

$$S = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin \hat{A} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), decorre

$$S = \frac{abc}{4R}$$

## 128. Teorema

Em qualquer triângulo não isósceles nem retângulo valem as relações seguintes:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}}, \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\hat{A} - \hat{C}}{2}}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}}$$

### Demonstração

Partindo da lei dos senos e usando propriedade das proporções, temos:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \implies \frac{a}{b} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} \implies \frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin \hat{A} + \sin \hat{B}}{\sin \hat{A} - \sin \hat{B}} =$$

$$= \frac{2 \sin \left( \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right)}{2 \sin \left( \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \right)} = \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right)}$$

As outras duas são provadas de modo análogo.

## EXERCÍCIOS

C.393 Calcular o lado  $a$  de um triângulo ABC sabendo a medida da altura  $h_a$  e as medidas dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  que  $h_a$  forma com  $c$  e  $b$ , respectivamente.

C.394 Calcular a área de um triângulo que tem dois lados de medidas conhecidas,  $b = 7$  m e  $c = 4$  m, formando entre si um ângulo de  $60^\circ$ .

C.395 (MAPOFEI-75) Calcular a área do triângulo ABC, sendo  $\overline{AB} = 4$  cm,  $\hat{A} = 30^\circ$  e  $\hat{C} = 45^\circ$ .

C.396 (MAPOFEI-74) As diagonais de um paralelogramo medem 10 m e 20 m e formam um ângulo de  $60^\circ$ . Achar a área do paralelogramo.

C.397 Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC de área  $20 \text{ cm}^2$ , o qual tem dois lados formando ângulo agudo e com medidas 8 m e 10 m, respectivamente.

C.398 Sejam  $a$  e  $b$  as medidas de dois segmentos BC e CA que têm uma extremidade comum e formam entre si um ângulo  $\theta$ . Pode-se:

- esboçar o gráfico da área  $S$  do triângulo ABC em função de  $\theta$ ;
- dizer para que valor de  $\theta$  é máximo o valor de  $S$ ;
- estabelecer qual é o acréscimo percentual em  $S$  quando  $\theta$  passa de  $30^\circ$  para  $120^\circ$ .

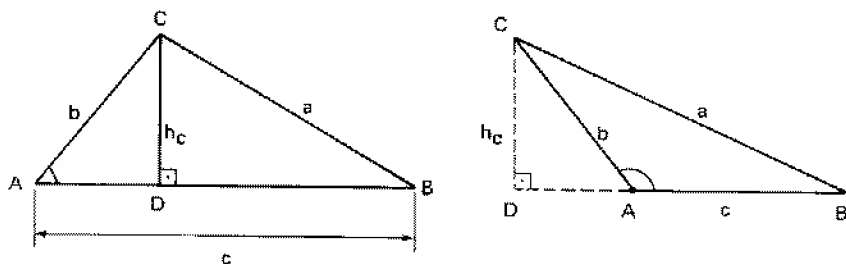
C.399 Demonstrar que em todo triângulo ABC valem as seguintes relações:

- $a \cdot \sin(\hat{B} - \hat{C}) + b \cdot \sin(\hat{C} - \hat{A}) + c \cdot \sin(\hat{A} - \hat{B}) = 0$
- $a \cdot \cos \hat{B} - b \cdot \cos \hat{C} = c \cdot \cos \hat{A}$
- $(b+c) \cdot \cos \hat{A} + (c+a) \cdot \cos \hat{B} + (a+b) \cdot \cos \hat{C} = a+b+c$
- $\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin(\hat{A} - \hat{B})}{\sin(\hat{A} + \hat{B})}$
- $\frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2} = \frac{\operatorname{tg} \hat{A}}{\operatorname{tg} \hat{B}} \quad (\hat{B} \neq 90^\circ)$
- $a = \frac{(b+c) \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2}}{\cos \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}}$
- $a = \frac{(b-c) \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{\sin \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}} \quad (\hat{B} \neq \hat{C})$

## II. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

Vamos deduzir fórmulas que permitem o cálculo de segmentos notáveis de um triângulo (alturas, medianas, bissetrizes internas, raio da circunferência circunscrita, etc) tendo apenas as medidas dos lados e dos ângulos internos.

### 128. Alturas



No triângulo ADC retângulo, temos:

$$h_c = b \cdot \sin \hat{A}$$

então

$$\begin{aligned} h_c^2 &= b^2 \cdot \sin^2 \hat{A} = b^2 (1 - \cos^2 \hat{A}) = b^2 - b^2 \cdot \cos^2 \hat{A} = \\ &= b^2 - b^2 \cdot \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 = \frac{4b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} = \\ &= \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} = \\ &= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2} = \\ &= \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{4c^2} = \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2} = \\ &= \frac{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}{4c^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2} \end{aligned}$$

portanto

$$h_c = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

De maneira análoga, teríamos:

$$h_a = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{e} \quad h_b = \frac{2}{b} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

### 130. Área

Das fórmulas que dão as alturas decorre uma fórmula para a área do triângulo, chamada fórmula de Hierão:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

então

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

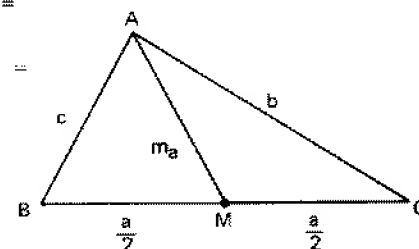
### 131. Medianas

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo AMC, temos:

$$\begin{aligned} m_a^2 &= b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot b \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \hat{C} = \\ &= b^2 + \frac{a^2}{4} - b \cdot a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \\ &= \frac{4b^2 + a^2 - 2a^2 - 2b^2 + 2c^2}{4} = \\ &= \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \end{aligned}$$

portanto

$$m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$



De forma análoga teríamos:

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

e

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

### 132. Bissetrizes internas

No triângulo ABS, temos:

$$\frac{x}{c} = \frac{\sin \frac{\hat{A}}{2}}{\sin \alpha}$$

No triângulo ACS, temos:

$$\frac{y}{b} = \frac{\sin \frac{\hat{A}}{2}}{\sin \alpha}$$

Então, vem:

$$\begin{aligned} \frac{x}{c} = \frac{y}{b} &\implies \frac{x}{y} = \frac{c}{b} \implies \frac{x}{x+y} = \frac{c}{b+c} \implies \\ &\implies \frac{x}{a} = \frac{c}{b+c} \implies x = \frac{a \cdot c}{b+c} \end{aligned}$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABS, temos:

$$s_a^2 = x^2 + c^2 - 2xc \cdot \cos \hat{B} =$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a \cdot c}{b+c}\right)^2 + c^2 - 2 \cdot \left(\frac{a \cdot c}{b+c}\right) \cdot c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \\ &= \frac{2b^2c^2 + c^3b + cb^3 - a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} = \\ &= \frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2} = \frac{bc(2p)(2p-2a)}{(b+c)^2} \end{aligned}$$

então:

$$s_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}$$

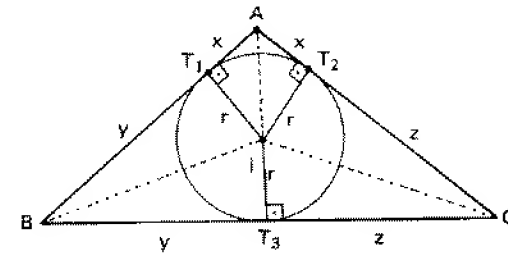
De forma análoga teríamos:

$$s_b = \frac{2}{a+c} \sqrt{acp(p-b)}$$

e

$$s_c = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)}$$

### 133. Raio da circunferência inscrita



Ligando cada vértice do triângulo ABC com o centro I da circunferência, dividimos ABC em três triângulos ABI, ACI e BCI, então:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ABI} + S_{ACI} + S_{BCI} = \\ &= \frac{c \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = p \cdot r \end{aligned}$$

então:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p \cdot r$$

portanto

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Uma outra forma de calcular r seria notar que:

$$\operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \frac{T_1 I}{AT_1} = \frac{r}{x}, \quad \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = \frac{T_1 I}{BT_1} = \frac{r}{y}, \quad \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = \frac{T_2 I}{CT_2} = \frac{r}{z} \quad (1)$$

e mais:

$$x + y = c, \quad y + z = a, \quad z + x = b$$

portanto, resolvendo o sistema, vem:

$$x = \frac{b+c-a}{2} = p-a, \quad y = \frac{a+c-b}{2} = p-b, \quad z = \frac{a+b-c}{2} = p-c \quad (2)$$

e, finalmente, substituindo (2) em (1) vem:

$$r = (p-a) \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2}$$

$$r = (p-b) \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2}$$

$$r = (p-c) \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2}$$

### 134. Raio da circunferência circunscrita

Vimos anteriormente que:

$$S = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

então

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

### EXERCÍCIOS

C.400 Calcular as alturas, as medianas, as bissetrizes internas e os raios das circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo cujos lados medem 4, 6 e 8.

C.401 Os lados de um triângulo ABC são  $a = 5$ ,  $b = 6$  e  $c = 7$ . Calcular a medida da mediana  $m_a$  e o ângulo agudo que ela forma com o lado BC.

C.402 Calcular a medida da bissetriz interna  $S_a$  do triângulo ABC em que  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $b = 30$  m e  $c = 15$  m.

C.403 Calcular os raios das circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo ABC no qual  $a = 13$ ,  $b = 4$  e  $\cos \hat{C} = -\frac{5}{13}$ .

C.404 Designando por  $r_a$ ,  $r_b$  e  $r_c$  os raios das circunferências ex-inscritas ao triângulo ABC nos ângulos A, B e C, respectivamente, provar que:

$$I) r_a = p \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = (p-b) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{C}}{2} = (p-c) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{B}}{2}$$

$$II) r_b = p \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = (p-a) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{C}}{2} = (p-c) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{A}}{2}$$

$$III) r_c = p \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = (p-a) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{B}}{2} = (p-b) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{A}}{2}$$

C.405 Calcular os comprimentos dos lados de um triângulo isósceles conhecendo  $r$  (raio da circunferência inscrita) e  $r'$  (raio da circunferência ex-inscrita à base do triângulo).

C.406 Demonstrar que é retângulo todo triângulo no qual o raio de um círculo ex-inscrito é igual à soma dos raios dos outros dois ex-inscritos com o raio do inscrito.

C.407 Qual é a condição que os lados de um triângulo devem satisfazer para que o raio da circunferência circunscrita seja o triplo do raio da inscrita?

C.408 Sendo  $r$  o raio do círculo inscrito a um triângulo e  $\alpha, \beta, \gamma$  as distâncias do incentro aos vértices A, B, C respectivamente, demonstrar que:

$$\frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{r} = \frac{abc}{2p}$$

C.409 Dados dois triângulos ABC e A'B'C' nos quais  $\hat{A} + \hat{A}' = \pi$  e  $\hat{B} = \hat{B}'$  demonstrar que  $aa' = bb' + cc'$ .

C.410 Provar que em todo triângulo valem as seguintes relações:

$$I) S = \frac{1}{4} (a^2 \cdot \operatorname{sen} 2\hat{B} + b^2 \cdot \operatorname{sen} 2\hat{A})$$

$$II) S = \frac{(a^2 - b^2) \cdot \operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} \hat{B}}{2 \cdot \operatorname{sen} (\hat{A} - \hat{B})} \quad (\hat{A} \neq \hat{B})$$

$$III) (b-c) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{A}}{2} + (c-a) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{B}}{2} + (a-b) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{C}}{2} = 0$$

$$IV) (b^2 - a^2) \cdot \operatorname{cotg} \hat{A} + (c^2 - a^2) \cdot \operatorname{cotg} \hat{B} + (a^2 - b^2) \cdot \operatorname{cotg} \hat{C} = 0$$

$$(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \neq \frac{\pi}{2})$$

$$V) \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = \frac{r}{p}$$

$$VI) \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} + \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} + \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = \frac{4R + r}{p}$$

$$VII) \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\hat{B}}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\hat{C}}{2} = \frac{r}{4R}$$

$$VIII) \cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} = 1 + \frac{r}{R}$$

$$IX) a \cdot \cos \hat{A} + b \cdot \cos \hat{B} + c \cdot \cos \hat{C} = \frac{2pr}{R}$$

### III. RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS QUAISQUER

135. Resolver um triângulo qualquer significa calcular seus elementos principais:  $a, b, c, \hat{A}, \hat{B}$  e  $\hat{C}$ . Para isso é necessário que sejam dadas três informações sobre o triângulo, sendo uma delas, pelo menos, a medida de um segmento ligado ao triângulo (lado, altura, mediana, etc).

Há quatro problemas clássicos de resolução de triângulos que trataremos com destaque.

### 136. 1º problema

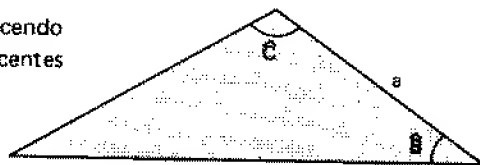
Resolver um triângulo conhecendo um lado ( $a$ ) e os dois ângulos adjacentes a ele ( $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ ).

**Solução**

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}),$$

$$b = \frac{a \cdot \sin \hat{B}}{\sin \hat{A}},$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{A}},$$



### 137. 2º problema

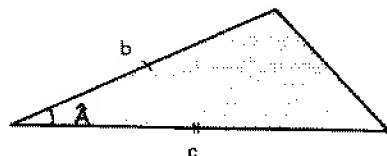
Resolver um triângulo conhecendo dois lados ( $b$  e  $c$ ) e o ângulo que eles formam ( $\hat{A}$ ).

**Solução**

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \implies \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C} \implies \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



### 138. 3º problema

Resolver um triângulo conhecendo os três lados ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ).

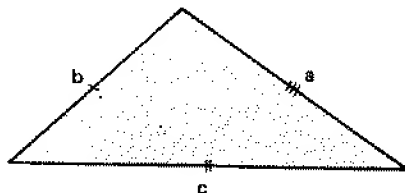
**Solução**

Da lei dos cossenos, vêm:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



Notemos que o problema só tem solução se estes cossenos ficarem no intervalo  $]-1, +1[$ , isto é, se:

$$a < b + c, \quad b < a + c \quad \text{e} \quad c < a + b.$$

### 139. 4º problema

Resolver um triângulo conhecendo dois lados ( $a$  e  $b$ ) e o ângulo oposto a um deles ( $\hat{A}$ ).



**Solução**

$$\sin \hat{B} = \frac{b}{a} \cdot \sin \hat{A}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{A}}$$

**Discussão**

$$1^\circ \text{ caso: } b \cdot \sin \hat{A} > a$$

$$\text{Então } \frac{b \cdot \sin \hat{A}}{a} = \sin \hat{B} > 1 \implies \nexists \text{ solução}$$

$$2^\circ \text{ caso: } b \cdot \sin \hat{A} = a$$

$$\text{Então } \frac{b \cdot \sin \hat{A}}{a} = \sin \hat{B} = 1 \implies \hat{B} = 90^\circ$$

portanto, existe solução somente se  $\hat{A} < 90^\circ$ , caso contrário  $\hat{A} + \hat{B} > 180^\circ$ .

$$3^\circ \text{ caso: } b \cdot \sin \hat{A} < a$$

$$\text{Então } \frac{b \cdot \sin \hat{A}}{a} = \sin \hat{B} < 1 \text{ e existem dois ângulos } \hat{B}_1 \text{ e } \hat{B}_2, \text{ suplementares, que satisfazem a relação } \sin \hat{B} = \frac{b \cdot \sin \hat{A}}{a}.$$

Admitamos  $0^\circ < \hat{B}_1 \leq 90^\circ$  e  $90^\circ \leq \hat{B}_2 < 180^\circ$ . Os ângulos  $\hat{B}_1$  ou  $\hat{B}_2$  servem como solução dependendo de  $\hat{A}$ . Há três possibilidades.

$$1^\circ) \hat{A} = 90^\circ$$

Neste caso só  $\hat{B}_1$  é solução pois  $\hat{A} + \hat{B}_2 \geq 180^\circ$



2ª)  $\hat{A} < 90^\circ$

Neste caso  $\hat{B}_1$  é uma solução porém  $\hat{B}_2$  só é solução se  $a < b$ , uma vez que:

$$\hat{B}_2 > \hat{A} \implies b > a.$$

3ª)  $\hat{A} > 90^\circ$

Neste caso  $\hat{B}_2$  não é solução pois  $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180^\circ$ ; quanto a  $\hat{B}_1$ , só é solução se  $a > b$ , uma vez que:

$$\hat{B}_1 < \hat{A} \implies b < a.$$

## EXERCÍCIOS

C.411 Resolver um triângulo ABC sabendo que a, b e c são números inteiros consecutivos e  $\hat{C} = 2\hat{A}$ .

C.412 Resolver um triângulo retângulo ABC, sabendo que  $a = 5$  e  $r = 1$ .

C.413 Resolver o triângulo A'B'C' cujos vértices são os pés das alturas do triângulo ABC dado:  $\hat{A}' = 180^\circ - 2\hat{A}$ ,  $\hat{B}' = 180^\circ - 2\hat{B}$ ,  $\hat{C}' = 180^\circ - 2\hat{C}$ .

C.414 Resolver o triângulo A'B'C' cujos vértices são os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados do triângulo ABC dado.

C.415 Resolver um triângulo ABC sabendo que  $a = 3$ ,  $b + c = 10$  e  $\hat{A} = \arcsen \frac{3\sqrt{91}}{50}$ .

C.416 Resolver um triângulo ABC sabendo que  $b + c = 11$ ,  $h_a = 4$  e  $\hat{A} = \arcsen \frac{6 + 4\sqrt{5}}{15}$ .

C.417 Resolver um triângulo ABC sabendo que  $\hat{A} = 45^\circ$ ,  $b = 3$  e  $a + c = \frac{9\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{2}$ .

C.418 Resolver um triângulo ABC admitindo conhecidos  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  e S.

C.419 Resolver um triângulo ABC admitindo conhecidos  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  e  $h_a$ .

## CAPÍTULO I

C.2 a)  $\frac{7\pi}{6}$  rad b)  $\frac{4\pi}{3}$  rad c)  $\frac{3\pi}{2}$  rad d)  $\frac{5\pi}{3}$  rad e)  $\frac{7\pi}{4}$  rad f)  $\frac{11\pi}{6}$  rad

C.4 a)  $30^\circ$  b)  $45^\circ$  c)  $60^\circ$  d)  $120^\circ$  e)  $135^\circ$  f)  $150^\circ$

C.9 a)  $\frac{11\pi}{12}$  rad e b)  $\frac{5\pi}{6}$  rad

C.10 a)  $4^\circ$ , b)  $7^\circ$ , c)  $2^\circ$

C.13  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$  rad ou  $120^\circ$

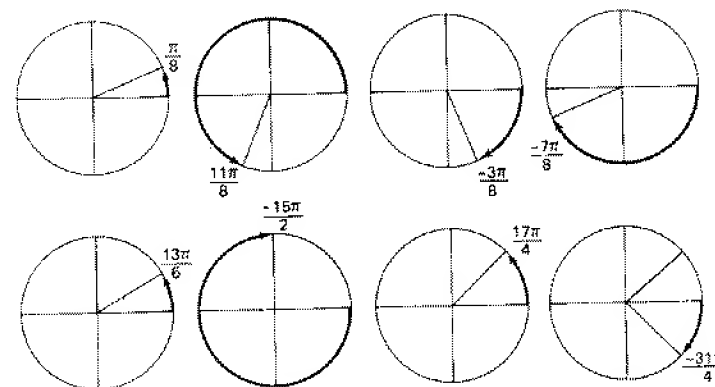
C.14  $l = 31,5$  cm

C.16 a)  $160^\circ$  b)  $152^\circ 30'$  c)  $15^\circ$

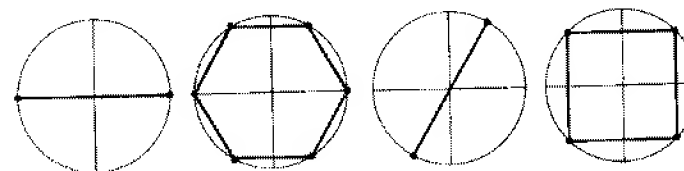
C.19

Im x	A	P <sub>1</sub>	B	P <sub>2</sub>	A'	P <sub>3</sub>	B'	P <sub>4</sub>
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$

C.20

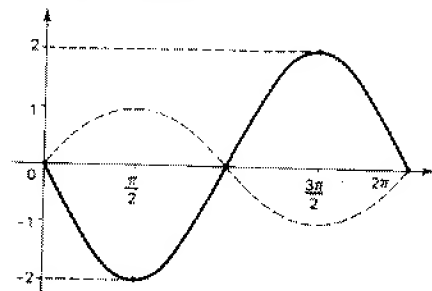


C.22

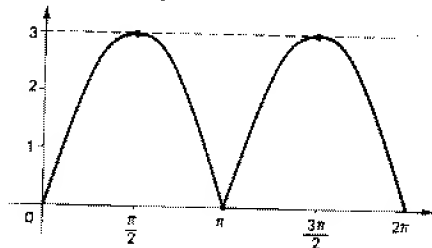


# CAPÍTULO II

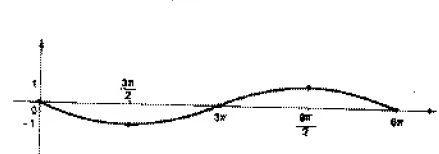
C.25  $\text{Im}(f) = [-2, 2]$ ,  $p(f) = 2\pi$



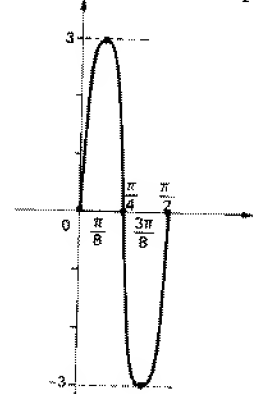
C.27  $\text{Im}(f) = [0, 3]$ ,  $p(f) = \pi$



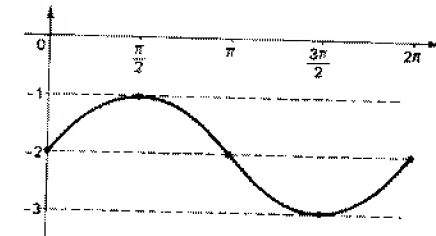
C.31  $\text{Im}(f) = [-1, 1]$ ,  $p(f) = 6\pi$



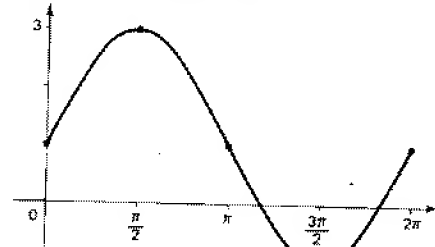
C.32  $\text{Im}(f) = [-3, 3]$ ,  $p(f) = \frac{\pi}{2}$



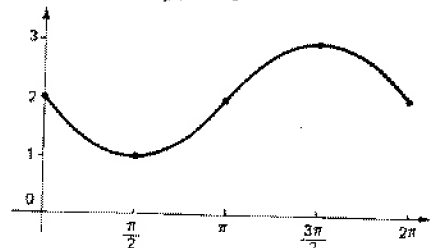
C.34  $\text{Im}(f) = [-3, -1]$ ,  $p(f) = 2\pi$



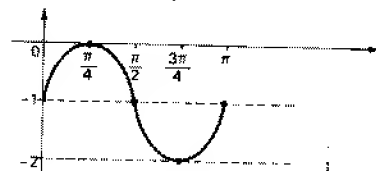
C.35  $\text{Im}(f) = [-1, 3]$ ,  $p(f) = 2\pi$



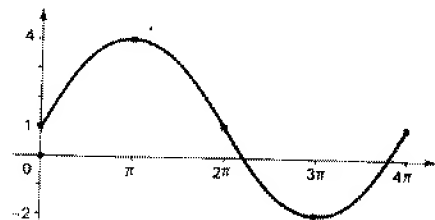
C.36  $\text{Im}(f) = [1, 3]$ ,  $p(f) = 2\pi$



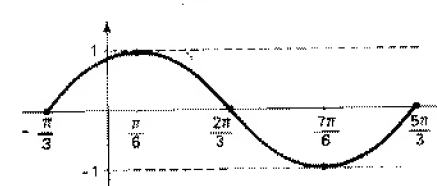
C.37  $\text{Im}(f) = [-2, 0]$ ,  $p(f) = \pi$



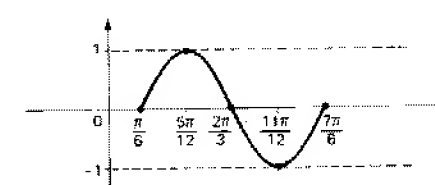
C.38  $\text{Im}(f) = [-2, 4]$ ,  $p(f) = 4\pi$



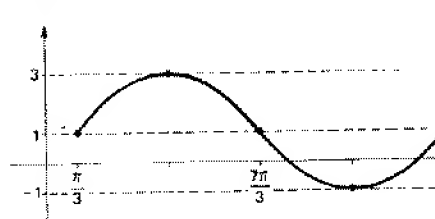
C.40  $\text{Im}(f) = [-1, 1]$ ,  $p(f) = 2\pi$



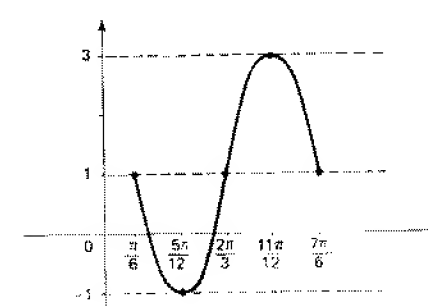
C.41  $\text{Im}(f) = [-1, 1]$ ,  $p(f) = \pi$



C.42  $\text{Im}(f) = [-1, 3]$ ,  $p(f) = 4\pi$

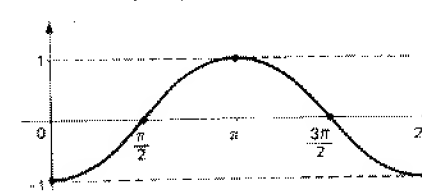


C.44  $\text{Im}(f) = [-1, 3]$ ,  $p(f) = \pi$

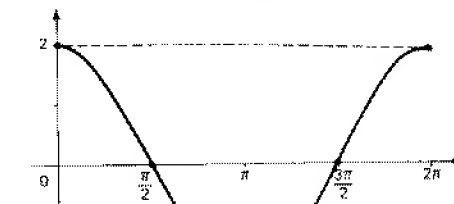


C.46 a)  $\frac{1}{5} \leq m \leq \frac{3}{5}$ , b)  $m \leq \frac{3}{2}$

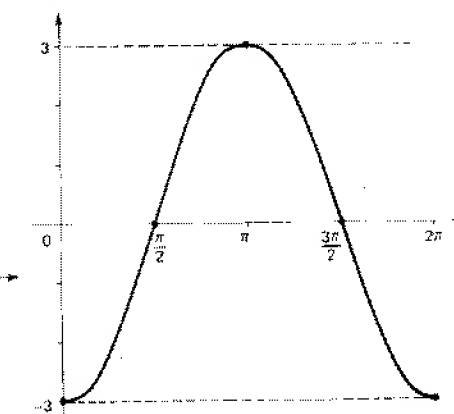
C.47  $\text{Im}(f) = [-1, 1]$ ,  $p(f) = 2\pi$



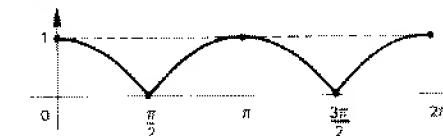
C.48  $\text{Im}(f) = [-2, 2]$ ,  $p(f) = 2\pi$



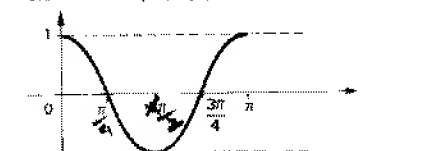
C.49  $\text{Im}(f) = [-3, 3]$ ,  $p(f) = 2\pi$



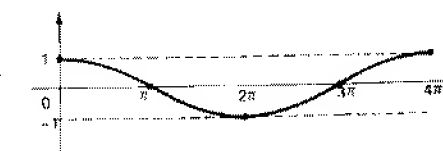
C.50  $\text{Im}(f) = [0, 1]$ ,  $p(f) = \pi$



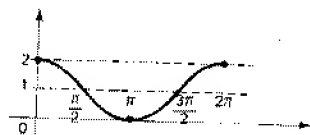
C.51  $\text{Im}(f) = [-1, 1]$ ,  $p(f) = \pi$



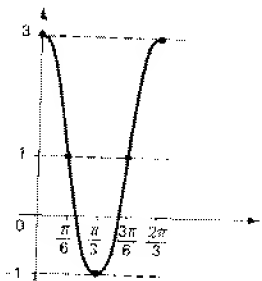
C.52  $\text{Im}(f) = [-1, 1]$ ,  $p(f) = 4\pi$



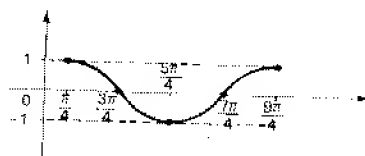
C.53  $\text{Im}(f) = [0, 2]$ ,  $\text{p}(f) = 2\pi$



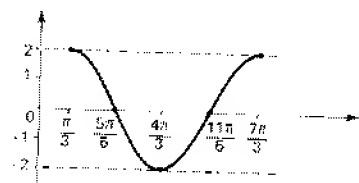
C.54  $\text{Im}(f) = [-1, 3]$ ,  $\text{p}(f) = \frac{2\pi}{3}$



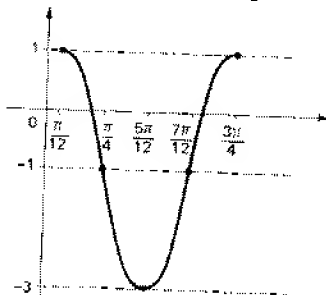
C.55  $\text{Im}(f) = [-1, 1]$ ,  $\text{p}(f) = 2\pi$



C.56  $\text{Im}(f) = [-2, 2]$ ,  $\text{p}(f) = 2\pi$



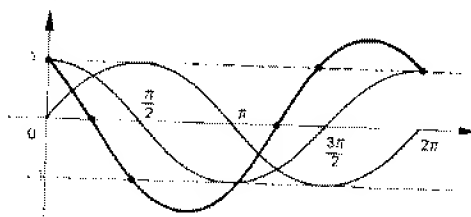
C.57  $\text{Im}(f) = [-3, 1]$ ,  $\text{p}(f) = \frac{2\pi}{3}$



C.58  $t \leq -\frac{1}{3}$  e  $t \geq 3$

C.60  $v_1 > 0$ ,  $v_2 < 0$ ,  $v_3 = 0$ ,  $v_4 < 0$

C.62



C.65 a)  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$

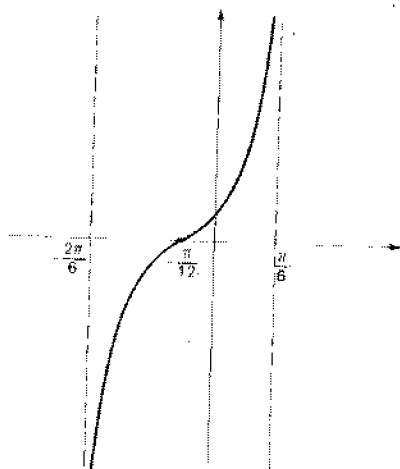
b)  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

C.66  $v_1 > 0$ ,  $v_2 < 0$

C.67  $\alpha \leq 1$  ou  $\alpha \geq 4$

C.69  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

$\text{p}(f) = \frac{\pi}{2}$



C.70  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

$D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$\text{p}(f) = \pi$ ,  $\text{p}(g) = \pi$ ,  $\text{p}(h) = 2\pi$

C.71 a)  $m \leq 2$

b)  $m \leq \frac{1}{3}$  ou  $m \geq 1$

c)  $0 \leq \pi < \frac{1}{3}$  ou  $\frac{1}{3} < \pi \leq \frac{2}{3}$

C.72  $v_1 > 0$ ,  $v_2 < 0$ ,  $v_3 < 0$

### CAPÍTULO III

C.74  $\sin x = -\frac{24}{25}$ ,  $\cos x = -\frac{7}{25}$

$\tan x = \frac{24}{7}$ ,  $\cotg x = \frac{7}{24}$ ,  $\sec x = -\frac{25}{7}$

C.76  $\cos x = \pm \frac{2\sqrt{m}}{m+1}$

C.77  $\sec x = \pm \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

C.79  $y = 6$

C.81  $y = \frac{467}{8}$

C.83  $\cos x = \frac{1}{2}$ ,  $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

C.84  $\tan x = -2$  ou  $\tan x = -\frac{1}{2}$

C.86  $m = 3$  ou  $m = -1$

C.87  $a = 1$

C.90  $a^2 - 2b = 1$

C.92  $y = \frac{8}{2} (3 - a^2)$

k)  $\cos = -\frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{6}$

l)  $\tan(-\frac{11\pi}{3}) = \cotg \frac{\pi}{6}$

C.121 a)  $\sin x$

c)  $-\tan x$

C.122  $\cos^2 x$

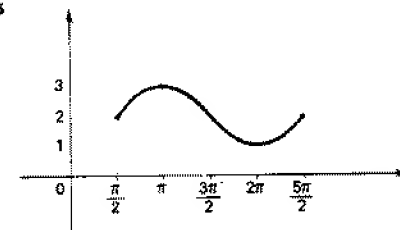
C.123  $-\sec^2 x$

C.124 1

C.125

b)  $-\cotg^2 x$

d)  $\cotg x$



### CAPÍTULO IV

C.117 a)  $\cos 178^\circ = -\cos 2^\circ$

b)  $\sin 251^\circ = -\sin 71^\circ$

c)  $\tan 290^\circ = -\tan 10^\circ$

d)  $\cotg \frac{7\pi}{6} = \cotg \frac{\pi}{6}$

e)  $\sec 1924^\circ = -\sec 56^\circ$

f)  $\operatorname{cosec} \frac{23\pi}{6} = -\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6}$

g)  $\sin(-\frac{7\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6}$

h)  $\cos(-\frac{5\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3}$

i)  $\tan(-\frac{3\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4}$

j)  $\sin \frac{21\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4}$

k)  $\cos \frac{31\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6}$

l)  $\tan -\frac{11\pi}{3} = -\tan \frac{\pi}{3}$

C.118 a)  $\sin 261^\circ = -\cos 9^\circ$

b)  $\cos 2861^\circ = \cos 19^\circ$

c)  $\tan 611^\circ = -\tan 29^\circ$

d)  $\sin \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{6}$

e)  $\cos \frac{2\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{6}$

f)  $\tan \frac{5\pi}{3} = -\cotg \frac{\pi}{6}$

g)  $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6}$

h)  $\cos \frac{7\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6}$

i)  $\tan \frac{11\pi}{6} = -\tan \frac{\pi}{6}$

j)  $\sin(-\frac{5\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{6}$

### CAPÍTULO V

C.127  $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$

$\tan \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$

C.129  $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$

C.130  $\sin 930^\circ = -\frac{1}{2}$ ,  $\cos 930^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 930^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\cotg 930^\circ = \sqrt{3}$

$\sec 930^\circ = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ,  $\operatorname{cosec} x = -2$

### CAPÍTULO VI

C.132  $\cotg 165^\circ = -(2 + \sqrt{3})$

$\sec 255^\circ = (\sqrt{6} + \sqrt{2})$

$\operatorname{cosec} 15^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

C.133  $\frac{1}{3}$

C.134  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C.137  $\sin(x+y) = -\frac{84}{85}$

$\cos(x+y) = \frac{13}{85}$

$\tan(x+y) = -\frac{84}{13}$

C.145  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $\text{p}(f) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\text{Im}(f) = [-1, 1]$

$D(g) = \mathbb{R}$ ,  $\text{p}(g) = 2\pi$ ,  $\text{Im}(g) = [-2, 2]$

$D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi\}$

$\text{p}(h) = \pi$ ,  $\text{Im}(h) = \mathbb{R}$

$$C.146 \rho(t) = \frac{\pi}{3}$$

$$C.148 \frac{2}{3}$$

$$C.150 a) \frac{1}{9}$$

$$C.152 \sin 3x = \frac{-44}{125}$$

$$C.153 \frac{2035}{2197}$$

$$C.154 \lg 3x = -\frac{5\sqrt{7}}{9}$$

$$C.155 y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$C.159 a) p(f) = \pi, D(f) = \mathbb{R}, \text{Im}(f) = [-1, 1]$$

$$b) p(g) = \frac{\pi}{2}, D(g) = \mathbb{R}, \text{Im}(g) = [0, 2]$$

$$c) p(h) = \frac{\pi}{2}, D(h) = \mathbb{R}, \text{Im}(h) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$C.160 p(f) = \pi, p(g) = \frac{\pi}{2}, p(h) = \frac{\pi}{2}$$

$$C.164 \sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \lg \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C.165 \sin \frac{x}{4} = \sqrt{\frac{10-7\sqrt{2}}{20}}$$

$$\cos \frac{x}{4} = \sqrt{\frac{10+7\sqrt{2}}{20}}$$

$$\lg \frac{x}{4} = \sqrt{\frac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}$$

$$C.166 \lg \left(\frac{\pi+x}{2}\right) = +\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$b) \frac{\sqrt{10-2\sqrt{2}}}{6}$$

$$C.168 f(x) = |\lg x|, \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}, p(f) = \pi$$

$$C.169 D(f) = \mathbb{R}, p(f) = \frac{\pi}{4}, \text{Im}(f) = [0, \sqrt{2}]$$

$$C.174 a) 2 \cdot \sin b \cdot \cos(a+b)$$

$$b) 2 \cdot \cos(a+b) \cdot \cos b$$

$$c) 4 \cdot \cos r \cdot \cos \frac{r}{2} \cdot \sin \frac{2a+3r}{2}$$

$$d) 4 \cdot \cos b \cdot \cos \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{2a+3b}{2}$$

$$e) \sin(p+q) \cdot \sin(q-p)$$

$$f) \sin(p+q) \cdot \sin(p-q)$$

$$g) \cos(p+q) \cdot \cos(p-q)$$

$$h) \cotg(b-a)$$

$$i) \lg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) \cdot \cotg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$$

$$C.175 \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos 2x)$$

$$C.178 a) v = -\frac{1}{4}(2 + \sqrt{2}) \quad b) y = -\frac{1}{4}$$

$$c) y = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

$$C.188 D(f) = \mathbb{R}$$

$$p(f) = \pi$$

$$\text{Im}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$C.189 p(f) = \pi$$

$$C.199 a) \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\}$$

$$b) \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}\}$$

$$C.200 a) \frac{\pi}{3}, b = \frac{\pi}{3}, c = \frac{\pi}{3}$$

$$C.201 x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, y = -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$$

$$C.204 a) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$$

$$b) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\}$$

$$c) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi\}$$

$$d) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$$

$$e) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$$

$$f) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$$

$$g) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi\}$$

$$h) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$$

$$i) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$$

$$j) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$$

$$k) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$$

$$l) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$$

$$m) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$$

$$C.206 a) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{k\pi}{2}\}$$

$$b) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}\}$$

$$c) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}\}$$

$$C.207 A = \frac{\pi}{6}, B = \frac{\pi}{6}, C = \frac{2\pi}{3}$$

$$C.208 a) x = y = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$b) x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$y + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$C.211 a) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + k\pi\}$$

$$b) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + k\pi\}$$

$$c) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi\}$$

$$d) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$$

$$e) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\}$$

$$f) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$$

$$g) S = \emptyset$$

$$h) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}\}$$

$$i) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\}$$

$$j) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\}$$

$$k) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\}$$

$$C.212 a) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\}$$

$$b) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\}$$

$$c) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\}$$

$$d) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = k\pi\}$$

$$C.213 S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi\}$$

$$C.214 p = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$C.217 S = \left\{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}\right\}$$

$$C.219 S = \left\{0, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi\right\}$$

$$C.221 S = \left\{0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right\}$$

$$C.222 S = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi\right\}$$

$$C.224 S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$$

$$C.225 S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$$

$$C.226 x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$y = \frac{\pi}{6} - 2k\pi$$

$$C.228 a) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi\}$$

$$b) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\}$$

$$C.230 a) S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right\}$$

$$b) S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$$

$$C.231 S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = k\pi\}$$

$$C.233 \text{ As equações têm solução para } \forall m \in \mathbb{R}$$

$$C.236 a) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2k\pi}{m+n} \text{ ou } x = \frac{\pm\pi}{m-n} \text{ (} m \neq n \text{)}\}$$

$$b) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{a+b} + \frac{2k\pi}{a+b} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{a-b} + \frac{2k\pi}{a-b}\}$$

$$c) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\}$$

## CAPÍTULO VII

$$C.195 a) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{6\pi}{7} + 2k\pi\}$$

$$b) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$$

$$c) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$$

$$d) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\}$$

$$e) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\}$$

$$f) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$$

$$g) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}\}$$

$$h) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$$

$$i) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$$

$$j) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$$

$$C.196 S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi\}$$

$$C.197 S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$$

$$C.237 a) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{k\pi}{3}\}$$

$$b) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} - \pi + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} - \pi + 2k\pi\}$$

$$c) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{4} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\}$$

$$C.238 S = \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$$

$$C.239 S = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi\}$$

$$C.240 S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$$

$$C.241 b) x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ e } y = 2k\pi$$

$$C.242 a = \arcsen \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \quad b = \frac{\pi}{4}$$

$$C.245 a) S = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\}$$

$$b) S = \{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\}$$

$$c) S = \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$$

$$d) S = \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$$

$$e) S = \{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\}$$

$$C.247 0, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

$$C.248 \lg(\arcsen \frac{3}{4}) = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$C.251 a) \frac{\sqrt{5}(-6 + \sqrt{3})}{15 + 2\sqrt{3}} \quad b) -\frac{24}{26} \quad c) -\frac{2035}{2197}$$

$$C.253 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$$

$$C.255 \operatorname{sen}(\arcsen \cos -\frac{3}{5}) = \frac{4}{5}$$

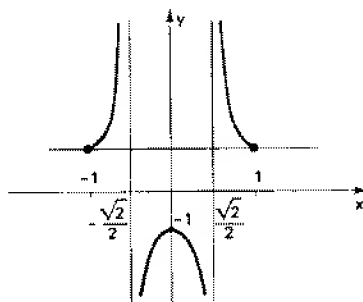
$$C.256 \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

$$C.257 \frac{\pi}{2} - A$$

$$C.259 a) -\frac{16}{85} \quad b) \frac{323}{325} \quad c) \frac{24}{7} \quad d) \frac{4}{5}$$

$$C.260 a) x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) gráfico



$$C.262 0, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}$$

$$C.264 \frac{3}{5}$$

$$C.266 a) \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad b) \pm \frac{4}{5} \quad c) \frac{6}{12} \quad d) -\frac{11753}{15625}$$

## CAPÍTULO VIII

$$C.272 \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi\}$$

$$C.273 \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{3}\}$$

$$C.274 \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi\}$$

$$C.276 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi\}$$

$$0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi\}$$

$$C.277 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\}$$

$$C.278 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\}$$

$$C.281 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \text{ ou } \frac{13\pi}{12} < x < \frac{17\pi}{12}\}$$

$$C.282 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{9} \leq x \leq \frac{7\pi}{9}, \frac{8\pi}{9} \leq x \leq \frac{13\pi}{9}, \frac{14\pi}{9} \leq x \leq 2\pi \text{ ou } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{9}\}$$

$$C.283 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12} \text{ e } x \neq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{13\pi}{12} \leq x \leq \frac{17\pi}{12} \text{ e } x \neq \frac{5\pi}{4}\}$$

$$C.284 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}\}$$

$$C.285 a) \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$$

$$b) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$$

$$C.287 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{ou } \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$$

$$C.288 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\}$$

$$C.289 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\}$$

$$C.290 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\}$$

$$C.291 S = \emptyset$$

$$C.293 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\}$$

$$C.294 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi\}$$

$$C.296 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\}$$

$$C.298 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{11\pi}{12} \text{ ou } \frac{13\pi}{12} \leq x \leq \frac{23\pi}{12}\}$$

$$C.299 \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x \leq 2\pi\}$$

$$C.301 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \pi\}$$

$$C.302 \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x \leq \pi\}$$

$$C.303 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}\}$$

$$C.305 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{11\pi}{6}\}$$

$$C.306 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\}$$

$$C.307 a) \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{6}\}$$

$$b) \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} < \alpha \leq \frac{5\pi}{6}\}$$

$$C.308 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}\}$$

$$C.309 \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}\}$$

$$C.310 a) S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$$

$$b) S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\}$$

$$C.312 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi\}$$

$$C.313 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + k\pi\}$$

$$C.314 \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{3} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\}$$

$$C.315 \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \text{ou } \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi\}$$

$$C.317 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \pi \leq x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{7\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leq x < \pi \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \leq x < 2\pi$$

$$C.318 0 \leq x < \frac{\pi}{8} \text{ ou } \pi \leq x < \frac{9\pi}{8} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{13\pi}{8} \text{ ou } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{8}$$

$$C.319 \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x \leq \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x \leq 2\pi\}$$

$$C.320 S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}\}$$

$$C.322 x = \frac{60}{13}, y = \frac{25}{13}, z = \frac{144}{13}, t = 13$$

$$C.323 \alpha^2 = \gamma\delta, \beta^2 = \gamma\epsilon, \varphi^2 = \delta\epsilon, \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2, \alpha\beta = \gamma\varphi, \alpha^2 + \delta^2 = \varphi^2$$

$$C.324 39$$

$$C.325 25$$

$$C.327 h = 8 \text{ ou } h = 2$$

$$C.328 5$$

$$C.329 12$$

$$C.330 R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$C.332 a = \frac{16\sqrt{3}}{3}, b = \frac{8\sqrt{3}}{3}, c = 8$$

$$C.333 a = 16, b = \frac{16}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}, c = \frac{16}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

$$C.334 b = 3 \text{ e } c = 3\sqrt{3}$$

$$C.335 \arcsen \sqrt{\frac{5}{7}} \text{ e } \arcsen \sqrt{\frac{7}{5}}$$

$$C.336 A_0 B_0 \cdot \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$C.337 \arcsen \frac{4}{3}$$

$$C.338 2\sqrt{37}$$

$$C.340 \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$C.341 2 \cdot \arcsen \frac{4}{5}$$

$$C.342 \hat{B} = 26^\circ 34'$$

$$C.343 C = \frac{1}{2} \arcsen \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$C.344 \hat{B} = 2 \cdot \arcsen \sqrt{2 - 1} \text{ e } a = 2\sqrt{2}$$

$$C.345 \arcsen \frac{5}{13} \text{ e } \arcsen \frac{12}{13}$$

$$C.347 h = 3\sqrt{6} \text{ m}$$

$$C.348 \frac{4}{5}$$

$$C.349 \frac{4}{5}$$

$$C.350 \frac{4}{5}$$

$$C.351 \frac{4}{5}$$

$$C.352 \frac{4}{5}$$

$$C.353 \frac{4}{5}$$

$$C.354 \frac{4}{5}$$

C.348  $h = d(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)$

C.349  $H = h \left[ \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} + 1 \right]$

C.350 1233 m

C.351  $x = 40$  m e  $y = 90$  m

C.353  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $\hat{C} = 30^\circ$ ,  $a = 2\sqrt{3}$  e  $c = \sqrt{3}$

C.354  $a = 13$ ,  $b = 5$ ,  $c = 12$ ,  $\hat{B} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{5}{13}$

$\hat{C} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{12}{13}$

C.355  $\hat{B} = 30^\circ$ ,  $\hat{C} = 80^\circ$ ,  $b = 2$ ,  $c = 2\sqrt{3}$

C.356  $a = 2$ ,  $b = c = \sqrt{2}$ ,  $\hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{4}$

C.357  $a = 14$ ,  $b = c = 25$ ,  $\hat{A} = 2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{7}{25}$

$\hat{B} = \hat{C} = \operatorname{arc} \cos \frac{7}{25}$

C.358  $a = 13$ ,  $b = 12$ ,  $c = 5$

$\hat{B} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{12}{13}$ ,  $\hat{C} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{5}{13}$

C.359  $a = 4$ ,  $b = c = 2\sqrt{2}$ ,  $\hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{4}$

## CAPÍTULO X

C.361  $c = \sqrt{10}$

C.362  $4\sqrt{19}$  m e  $4\sqrt{7}$  m

C.363  $\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{2\sqrt{41} - 20\sqrt{3}}{5}$

C.365  $\hat{A} = 45^\circ$ ,  $\hat{B} = 60^\circ$  e  $\hat{C} = 75^\circ$

C.366  $\hat{B} = \operatorname{arc} \cos \frac{57}{90}$

C.369  $c = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$

C.370  $7\sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{29}$ ,  $\sqrt{130}$

C.373 a) retângulo b) obtusângulo

c) acutângulo

C.374  $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} < u < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

C.377  $\hat{B} = 120^\circ$  e  $\hat{C} = 45^\circ$

C.378 ( $\hat{B} = 45^\circ$  e  $\hat{C} = 120^\circ$ ) ou ( $\hat{B} = 135^\circ$  e  $\hat{C} = 30^\circ$ )

C.379  $\hat{B} = 30^\circ$  e  $\hat{A} = 90^\circ$

C.380  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $\hat{B} = 90^\circ$  e  $\hat{C} = 60^\circ$

C.381  $c = 3\sqrt{3}$  m

C.382  $a = \frac{2p \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} (\alpha + \beta)}$

$b = \frac{2p \cdot \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} (\alpha + \beta)}$

$c = \frac{2p \cdot \operatorname{sen} (\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} (\alpha + \beta)}$

C.384  $\alpha = \gamma = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}}{5}$ ,  $\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3\sqrt{3}}{13}$

C.387 88 m

C.389  $\hat{B} = 75^\circ$

C.390  $\hat{B} = 57^\circ 30'$

C.381  $\hat{B} = 2 \cdot \operatorname{arc} \cos \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

C.382 b)  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  c)  $\alpha \cong 38^\circ 10' 22''$

C.393  $h_a \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$

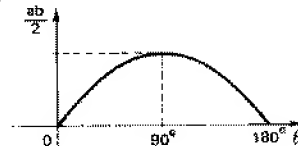
C.394  $S = 7\sqrt{3}$  m<sup>2</sup>

C.395  $(2 + \sqrt{12})$  cm<sup>2</sup>

C.396  $50\sqrt{3}$  m<sup>2</sup>

C.397  $2\sqrt{41} - 20\sqrt{3}$  m

C.398 a)



b)  $\theta = 90^\circ$

c) 73%

C.400 alturas:  $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ ,  $\sqrt{15}$ ,  $\frac{3\sqrt{15}}{4}$

medianas:  $\sqrt{45}$ ,  $\sqrt{31}$ ,  $\sqrt{10}$

bissetrizes:  $\frac{12\sqrt{15}}{7}$ ,  $2\sqrt{5}$ ,  $\frac{8\sqrt{6}}{5}$

inscrita:  $\frac{\sqrt{15}}{3}$ , circunscrita:  $\frac{16\sqrt{15}}{15}$

C.401  $m_a = \frac{\sqrt{145}}{2}$   $\operatorname{arc} \cos \frac{26}{10\sqrt{145}}$

C.402  $10\sqrt{3}$

C.403  $r = \frac{3}{2}$  e  $R = \frac{9}{8}$

C.405  $a = 2\sqrt{r \cdot r'}$  e  $b = c = \frac{(r' + r)\sqrt{r \cdot r'}}{(r' - r)}$

C.407  $abc = 6(a + b + c)$

C.411  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $c = 6$ ,  $\hat{A} = \operatorname{arc} \cos \frac{3}{5}$

$\hat{B} = 180^\circ - 3\hat{A}$ ,  $\hat{C} = 2\hat{A}$

C.412  $b = 3$ ,  $c = 4$ ,  $\hat{B} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{3}{4}$

e  $\hat{C} = \operatorname{arc} \cos \frac{3}{5}$

C.413  $a' = R \cdot \operatorname{sen} 2\hat{A}$ ,  $b' = R \cdot \operatorname{sen} 2\hat{B}$ ,

$c' = R \cdot \operatorname{sen} 2\hat{C}$

C.414  $\hat{A}' = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$ ,  $\hat{B}' = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}$ ,  $\hat{C}' = \frac{\hat{B} + \hat{A}}{2}$

$a' = 2(p - a) \cdot \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}$ ,  $b' = 2(p - b) \cdot \operatorname{sen} \frac{\hat{B}}{2}$ ,

e  $c' = 2(p - c) \cdot \operatorname{sen} \frac{\hat{C}}{2}$

C.415  $b = c = 5$ ,  $\hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{3\sqrt{91}}{10}$

C.416  $a = 3 + \sqrt{20}$ ,  $b = 5$ ,  $c = 6$

$\hat{B} = \operatorname{arc} \cos \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\hat{C} = \operatorname{arc} \cos \frac{3}{5}$

C.417  $e = 3\sqrt{2}$ ,  $c = \frac{3(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}$ ,  $\hat{B} = 30^\circ$ ,  $\hat{C} = 115^\circ$

C.418  $a = R \cdot \operatorname{sen} (\hat{B} + \hat{C})$ ,  $b = R \cdot \operatorname{sen} \hat{B}$ ,

$c = R \cdot \operatorname{sen} \hat{C}$  e  $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C})$ , onde

$R = \frac{S}{2 \cdot \operatorname{sen} (\hat{B} + \hat{C}) \cdot \operatorname{sen} \hat{B} \cdot \operatorname{sen} \hat{C}}$

C.419  $a = h_a \operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C}$ ,  $b = \frac{h_a}{\operatorname{sen} \hat{C}}$ ,  $c = \frac{h_a}{\operatorname{sen} \hat{B}}$

e  $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C})$

# TESTES

## FUNÇÕES

TC.1 (ITA-72) O ângulo convexo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos às 10 horas e 15 minutos é:

- a)  $142^\circ 30'$  b)  $142^\circ 40'$   
c)  $142^\circ$  d)  $141^\circ 30'$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.2 (FUVEST-77) O ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos é:

- a)  $27^\circ$  b)  $30^\circ$  c)  $36^\circ$  d)  $42^\circ$  e)  $72^\circ$

TC.3 (ITA-73) Entre 4 e 5 horas o ponteiro das horas de um relógio fica duas vezes em ângulo reto com o ponteiro dos minutos. Os momentos destas ocorrências serão:

- a) 4 h 5  $\frac{2}{11}$  min e 4 h 38  $\frac{5}{11}$  min b) 4 h 5  $\frac{5}{11}$  min e 4 h 38  $\frac{2}{11}$  min  
c) 4 h 5  $\frac{5}{11}$  min e 4 h 38  $\frac{5}{12}$  min d) 4 h 5  $\frac{3}{11}$  min e 4 h 38  $\frac{7}{11}$  min  
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.4 (PUC-70) Sendo  $\theta$  um ângulo positivo, então  $(\frac{5\pi}{2} - \theta)$  pertence ao:

- a) 1º quadrante b) 2º quadrante  
c) 3º quadrante d) 4º quadrante  
e) nenhuma das alternativas anteriores.

TC.5 (UDESC-74) Os arcos cujo cosseno é  $\sqrt{2}$  podem estar nos quadrantes:

- a) 1º e 4º b) 1º e 2º c) 1º e 3º d) 2º e 3º  
e) nenhuma das opções é correta.

TC.6 (PUC-76) Todos os valores de x, de modo que a expressão  $\operatorname{sen} \theta = \frac{2x-1}{3}$  exista, são:

- a)  $-1 \leq x < 1$  b)  $-1 < x \leq 0$  c)  $-1 \leq x \leq 2$   
d)  $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$  e)  $-1 \leq x < \frac{1}{3}$

TC.7 (MACK-73) O conjunto dos números reais  $a$  para os quais a equação  $\sin x = e + a^{-1}$  tem solução real em  $x$  é:

- a)  $\mathbb{R}$  b)  $\emptyset$  c)  $\{1, -1, 0\}$   
d)  $\{k\pi \mid k \text{ inteiro}\}$  e) nenhuma das anteriores.

TC.8 (CESCEM-77) Se  $x \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$  e  $\cos x = 2k - 1$ ; então,  $k$  varia no intervalo

- a)  $(-1; 0)$  b)  $[-1; 0)$  c)  $(0; \frac{1}{2})$  d)  $(0; 1)$  e)  $(\frac{1}{2}; 1)$

TC.9 (PUC-75) O valor numérico da expressão:

$$y = \cos 4x + \sin 2x + \operatorname{tg} 2x - \sec 8x \text{ para } x = \frac{\pi}{2} \text{ é:}$$

- a) 2 b) 1 c) 3 d) 0 e) 4

TC.10 (CESCEM-75) O menor valor que assume a expressão  $(6 - \sin x)$ ; para " $x$ " variando de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  é:

- a) 7 b) 6 c) 5 d) 1 e) -1

TC.11 (MACK-76) O valor máximo de  $y = 2 \sin x + \cos 2x$ ,  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ , é:

- a) 1,5 b) 2 c) 2,5 d) 3 e)  $\infty$

TC.12 (CESCEA-73) Assinale a afirmação verdadeira:

- a) Para todo  $a$  real, existe  $x$  real tal que  $\operatorname{tg} x = a$   
b) Existe  $x$  real tal que  $\sin x = a \iff a \leq 1$   
c) Existe  $x$  real tal que  $\sec x = a \iff |a| \leq 1$   
d) não sei

TC.13 (CESCEM-72) Os quadrantes onde estão os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  tais que:

$$\sin \alpha < 0 \text{ e } \cos \alpha < 0$$

$$\cos \beta < 0 \text{ e } \operatorname{tg} \beta < 0$$

$$\sin \gamma > 0 \text{ e } \operatorname{cotg} \gamma > 0 \text{ são respectivamente:}$$

- a)  $3^\circ, 2^\circ, 1^\circ$  b)  $2^\circ, 1^\circ, 3^\circ$  c)  $3^\circ, 1^\circ, 2^\circ$  d)  $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$  e)  $3^\circ, 2^\circ, 2^\circ$

TC.14 (SANTA CASA-77) Se  $F(x) = \cos x$ , então:

a)  $F(\frac{\pi}{2}) < F(\frac{\sqrt{3}}{2}) < F(\sqrt{2}) < F(1,5)$

b)  $F(1,5) < F(\frac{\pi}{2}) < F(\frac{\sqrt{3}}{2}) < F(\sqrt{2})$

c)  $F(\frac{\sqrt{3}}{2}) < F(\sqrt{2}) < F(1,5) < F(\frac{\pi}{2})$

d)  $F(\sqrt{2}) < F(1,5) < F(\frac{\sqrt{3}}{2}) < F(\frac{\pi}{2})$

e)  $F(\frac{\pi}{2}) < F(1,5) < F(\sqrt{2}) < F(\frac{\sqrt{3}}{2})$

TC.15 (CESCEM-70) Assinalar a desigualdade verdadeira para todo  $x$ :

- a)  $|\cos x| + |\sin x| \geq 1$  b)  $|\cos x - \sin x| \leq |\cos x| + |\sin x|$   
c)  $|\operatorname{tg} x| \geq |\cos x|$  d)  $|\operatorname{tg} x| \geq |\sec x|$   
e) nenhuma das alternativas anteriores

TC.16 (CESCEM-73) Entre as afirmações abaixo, uma e apenas uma, é verdadeira. Assinale-a:

- a) O seno e o cosseno são funções tais que quando uma cresce a outra decresce  
b)  $\cos x - \sin x \geq 0$ , para todo  $x$  real, pois  $\cos x \geq \sin x$   
c)  $\operatorname{tg} \frac{x}{4}$  é periódica de período  $2\pi$ , pois a tangente é uma função periódica de período  $\pi$   
d)  $1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \geq 0$ , para todo  $x$  real, pois  $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

TC.17 (CESCEA-73) Sejam  $x$  e  $y$  dois números reais tais que  $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$ . Assinale

a afirmação falsa:

- a)  $2 \operatorname{tg} x < 2 \operatorname{tg} y$   
b)  $\cos x < \cos y$   
c)  $\sin x < \sin y$   
d) não sei.

TC.18 (GV-70) A função  $F(x) = \sin x \cdot \log_1 x$  é:

- a) sempre negativa, para  $0 < x < \pi$   
b) sempre positiva, para  $0 < x < \pi$   
c) positiva para  $0 < x < 1$  e negativa para  $1 < x < \pi$   
d) negativa para  $0 < x < 1$  e positiva para  $1 < x < \pi$   
e) positiva para  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  e negativa para  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

TC.19 (POLI-68) Se  $x$  e  $y$  satisfazem  $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$  e  $z = \sin x - \operatorname{tg} y \cdot \cos x$ , então:

- a) para cada  $y$ ,  $z$  é uma função decrescente de  $x$   
b) para cada  $x$ ,  $z$  é uma função decrescente de  $y$   
c)  $z$  pode ser nulo  
d)  $z$  é sempre positivo  
e) nenhuma das anteriores

TC.20 (CESCEM-73) Considere a sequência de números reais que se obtém fazendo

$$x = \frac{2}{\pi + 2n\pi} \text{ na expressão } y = \sin \frac{1}{x}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ Pode-se afirmar que:}$$

- a) a sequência não é convergente  
b) o limite da sequência situa-se no intervalo fechado  $[-1; 1]$   
c) zero é um termo da sequência  
d) a sequência converge para +1 ou para -1  
e) o limite da sequência é zero

TC.21 (FFCLUSP-69) A solução de  $\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x = 3$  é:

- a)  $x = k \frac{\pi}{2}$  ( $k$  um inteiro qualquer)
- b)  $x = k\pi$  ( $k$  um inteiro qualquer)
- c)  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k$  um inteiro qualquer)
- d)  $x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$  ( $k$  um inteiro qualquer)
- e) nenhuma das respostas anteriores é verdadeira.

TC.22 (CESCEM-73) Considere a equação trigonométrica  $\sin x + \sin 2x = 2$ . Então:

- a) existem soluções todas irracionais
- b) existem soluções todas racionais
- c)  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ou  $\frac{\pi}{4} + k\pi$ ;  $k \in \mathbb{Z}$
- d) não existe  $x$  que satisfaça a equação
- e)  $x = 0$

TC.23 (CESCEA-72) Seja  $A \subset B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\pi\}$  o domínio da função  $f$ , dada por:  $f(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x}$ . Então,  $A$  é igual a:

- a)  $\{x \in B \mid x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq 0\}$
- b)  $\{x \in B \mid x \neq \pi\}$
- c)  $\{x \in B \mid x \neq \frac{3\pi}{2}\}$
- d)  $\{x \in B \mid x = \frac{3\pi}{2}\}$
- e) não sei

TC.24 (GV-74) Seja  $n$  o número de pontos do conjunto  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\pi\}$  nos quais  $\frac{\lg x}{\sin 4x}$  não está definida. Então  $n$  é igual a:

- a) 3
- b) 4
- c) 9
- d) 11
- e) 8

TC.25 (CESCEA-75) Assinalar a afirmação correta:

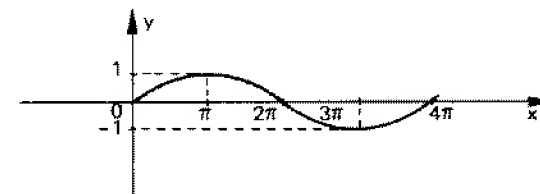
- a) a função tangente está definida para todo  $x$  real, é sempre crescente e tem período  $\pi$ .
- b) a função cotangente está definida para todo  $x$  real, diferente de  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , com  $k$  inteiro, é sempre crescente e tem período  $\pi$ .
- c) a função cossecante está definida para todo  $x$  real, diferente de  $k\pi$ , com  $k$  inteiro e tem valores no intervalo  $[1, +\infty[$ .
- d) a função seno está definida para todo  $x$  real e é sempre crescente.
- e) a função secante está definida para todo  $x$  real, diferente de  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , com  $k$  inteiro relativo e tem valores no conjunto  $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ .

TC.26 (CESCEM-71) Qual dos seguintes conjuntos de valores de  $x$  poderia constituir um domínio para a função  $\log \sin x$ ?

- a)  $x \leq 0$
- b)  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
- c)  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
- d)  $x \neq K \cdot \frac{3\pi}{4}$  ( $K = 0, 1, 2, \dots$ )
- e)  $x \neq K \cdot \frac{\pi}{2}$  ( $K = 0, 1, 2, \dots$ )

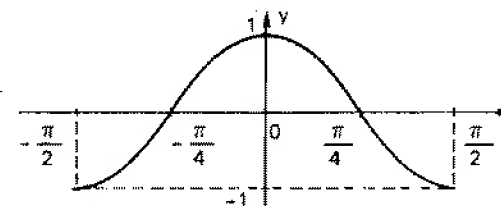
TC.27 (CESCEM-75) A função que melhor se adapta ao gráfico abaixo é:

- a)  $y = \sin \frac{x}{2}$
- b)  $y = \cos \frac{x}{2}$
- c)  $y = \sin 2x$
- d)  $y = \cos 2x$
- e)  $y = \sin x$



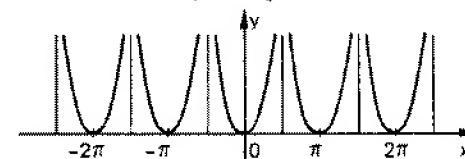
TC.28 (CESCEA-73) A figura é um esboço do gráfico da função:

- a)  $y = \cos x$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
- b)  $y = \cos 2x$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
- c)  $y = \sin 2x$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
- d) não sei



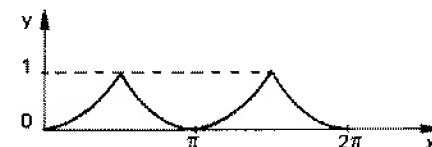
TC.29 (CESCEM-73) Qual das funções abaixo melhor se adapta ao gráfico?

- a)  $y = x^2$
- b)  $y = |\sin x|$
- c)  $y = |\sec x| - 1$
- d)  $y = |\cos x|$
- e)  $y = |\tan x| + 1$



TC.30 (MACK-77) O gráfico abaixo pode ser da função:

- a)  $|\sin x|$
- b)  $\sin^2 x$
- c)  $1 - |\sin x|$
- d)  $1 - |\cos x|$
- e) Não sei



TC.31 (GV-74) As equações abaixo representam curvas, num sistema cartesiano de coordenadas de eixos  $x$  e  $y$ . Só uma destas curvas não passa pelo ponto  $x = -0,5$ ;  $y = 2$ :

- a)  $y = \log_2 \left( \frac{1}{16} \right)^x$
- b)  $y = 8x^2$
- c)  $y = -\frac{\sin(\pi x)}{0,5}$
- d)  $y = \left| \frac{1}{x} \right|$
- e)  $y = e^x$



TC.32 (EESCUSP-69) O período da função  $3 \cos 4x$  é:

- a)  $\frac{\pi}{8}$       b)  $\frac{3\pi}{4}$       c)  $\frac{2\pi}{3}$       d)  $\frac{\pi}{2}$       e)  $\frac{\pi}{4}$

TC.33 (EAESP-GV-77) O período da função dada por  $y = 3 \sin(2\pi x + \frac{\pi}{2})$  é:

- a)  $\frac{1}{2}$       b)  $\frac{\pi}{2}$       c)  $2\pi$       d) 1      e)  $\frac{\pi}{4}$

TC.34 (STA CASA-73) Em relação a função  $y = 2 \sin x + 3 \cos \frac{x}{2}$  pode-se afirmar:

- a)  $y(x) = y(x + 2\pi)$       b) não é periódica      c) é tal que  $y(x) = y(x + \frac{\pi}{2})$   
d) é harmônica simples      e) é tal que  $y(x) = y(x + 4\pi)$

TC.35 (CESCEA-74) O domínio, a imagem e o período da função  $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{4})$  são, respectivamente:

- a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{\pi}{4} - k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\pi$   
b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $2\pi$   
c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}\}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\pi$   
d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $2\pi$   
e) não sei

TC.36 (CESCEM-73) Uma reta pela origem, de coeficiente angular negativo, tem três e somente três pontos em comum com o gráfico da função  $y = \sin x$ . A menor das três correspondentes abscissas:

- a) é um múltiplo de  $\pi$       b) está entre  $\frac{-3\pi}{2}$  e  $-\pi$       c) é nula  
d) está entre  $-2\pi$  e  $-\frac{3\pi}{2}$       e) é positiva

TC.37 (MACK-74) A intersecção dos gráficos das funções seno e tangente para  $0 < x < \pi$

- a) é vazia      b) contém um e um só ponto      c) contém o ponto de abscissa  $\frac{\pi}{4}$   
d) contém mais de um ponto      e) depende da escala usada

TC.38 (CESCEA-75) Dadas as curvas  $y = x^2$  e  $y = \cos x$ , assinalar dentre as afirmações abaixo, a verdadeira:

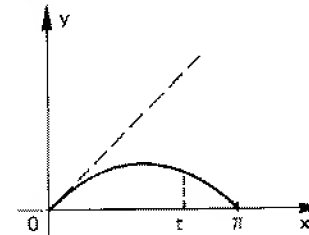
- a) elas não se interceptam  
b) elas se interceptam numa infinidade de pontos  
c) elas se interceptam em dois pontos  
d) elas se interceptam num único ponto  
e) elas se interceptam em três pontos

TC.39 (MACK-75) O número de pontos de intersecção dos gráficos das funções  $f$  e  $g$  dadas por:

$$f(x) = -|\cos x| \quad \text{e} \quad g(x) = \cos(\frac{\pi}{2} + x) \quad \text{com} \quad -\pi < x < \pi, \quad \text{é:}$$

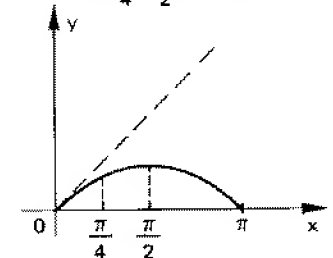
- a) 0      b) 1      c) 2      d) 3      e) maior que 3

TC.40 (FAAP-74) Para cada  $t \in [0, \pi]$ ,  $A(t) = 1 - \cos t$ , representa a área sob o gráfico de  $f$  (acima do eixo dos  $x$ ) dada por  $f(x) = \sin x$  (vide figura 1). Baseado nisso, a área sob o gráfico de  $f$  (acima do eixo dos  $x$ ) com  $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$  (vide figura 2)



vale:

- a)  $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$       b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       c) 1      d)  $\frac{1}{2}$       e)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$



## IDENTIDADES FUNDAMENTAIS

TC.41 (PUC-75) O valor da expressão  $25 \cdot \sin^2 x - 9 \cdot \tan^2 x$  sabendo que  $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{4}$  e  $x$  é do primeiro quadrante é:

- a) 2      b) 3      c) 4      d) 0      e) 1

TC.42 (GV-76) Se  $\sin a = \frac{24}{25}$  e  $\sec a$  é negativa, então o valor de  $\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$  é:

- a)  $\frac{3}{4}$       b)  $\frac{3}{5}$       c)  $\frac{5}{4}$       d)  $\frac{4}{3}$       e)  $\frac{1}{2}$

TC.43 (ITA-74) O valor da expressão  $x = \frac{2 \cdot \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$  quando  $\cos \theta = -\frac{3}{7}$  e  $\tan \theta < 0$ , é:

- a)  $\frac{4\sqrt{10}}{31}$       b)  $-\frac{2\sqrt{10}}{3}$       c)  $\frac{2\sqrt{10}}{15}$   
d)  $\frac{3\sqrt{10}}{7}$       e) nenhuma das respostas anteriores

TC.44 (CESCEA-70) Se  $\sin x = \frac{n-1}{n}$ , então,  $\frac{\tan^2 x + 1}{\cot^2 x + 1}$  é igual a:

- a)  $\frac{(n-1)^2}{2n-1}$       b)  $\frac{n^2}{2n-1}$       c)  $\frac{n-1}{(n+1)^2}$       d)  $\frac{n-1}{(2n+1)^2}$       e)  $\frac{(n-1)^2}{2n+1}$

TC.45 (CESCEM-76) Sabe-se que  $\sin x = a \neq 0$  e  $\cos x = b \neq 0$ . Logo,  $\tan x + \cotg x =$

- a)  $\frac{a+b}{ab}$  b)  $\frac{ab}{a+b}$  c)  $\frac{ab}{a^2+b^2}$  d)  $\frac{1}{ab}$  e)  $\frac{1}{a^2+b^2}$

TC.46 (MACK-73) As raízes da equação  $2x^2 - px - 1 = 0$  são  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ , sendo  $\theta$  um número real. O valor de  $p$  é:

- a) zero b) 2 c) 4 d) 5 e) nenhuma das respostas anteriores

TC.47 (ITA-71) Seja  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Qual afirmação abaixo é verdadeira?

- a)  $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \leq 1$  b)  $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \leq 2$   
c)  $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \geq 2$  d)  $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.48 (CESCEA-72) Assinale a afirmação falsa:

- a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin^2 x + \cos^2 x = 1\} = \mathbb{R}$   
b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \cdot \sin^2(3x) + 2 \cdot \cos^2(3x) = 6\} = \emptyset$   
c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin^4 x + \cos^4 x = 1\} = \mathbb{R}$   
d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid \sec^2 x > \tan^2 x + 1\} = \emptyset$   
e) não sei

TC.49 (CESCEM-70) Se  $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k$  inteiro, então  $\frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin \theta}$  é igual a:

- a)  $\tan \theta$  b)  $\sin \theta \cdot \cos \theta$  c)  $1 + \cos \theta$  d)  $1 + \sin \theta$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.50 (PUC-70) A expressão:  $\frac{\operatorname{cosec} x - \sin x}{\sec x - \cos x}$  é identicamente igual a:

- a)  $\cotg^3 x$  b)  $\sec^2 x$  c)  $\sin^2 x + \cos x$  d)  $\tan^2 x + \sec x$  e)  $\operatorname{cossac}^3 x$

TC.51 (CESCEA-71) A expressão:  $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{1 - \tan^4 x}$  é equivalente a:

- a)  $\cos x + \sin x$  b)  $\cos x - \sin x$  c)  $\cos^4 x$  d)  $\sin^4 x$  e) não sei

TC.52 (GV-75) A expressão  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x}$  é igual a:

- a)  $\frac{2}{\cos x}$  b)  $\frac{1}{\sin x}$  c)  $\sec x$  d)  $2 \operatorname{cosec} x$  e)  $\frac{\cos x}{1 + \sin x}$

TC.53 (CESCEA-73) As raízes da equação:  $x^2 - (2 \cdot \operatorname{tg} a)x - 1 = 0$  são

- a)  $\operatorname{tg} a \pm \operatorname{cosec} a$  b)  $\operatorname{tg} a \pm \cos a$   
c)  $\operatorname{tg} a \pm \sec a$  d) não sei

TC.54 (ITA-73) Eliminando  $\theta$  nas equações:

$$x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta = 2 \cdot a \cdot \sin \theta$$

$$x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta = a \cdot \cos \theta, a > 0 \text{ temos:}$$

- a)  $(x+y)^{\frac{2}{3}} - (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a(x+y)^2$  b)  $(x+y)^2 + (x-y)^2 = (x+y)a$   
c)  $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$  d) impossível eliminar  $\theta$   
e) nenhuma das respostas anteriores

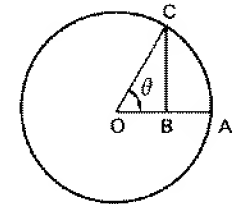
TC.55 (MACK-76) O valor de  $k$ , para o qual

$$(\cos x + \sin x)^2 + k \sin x \cos x - 1 = 0$$

é uma identidade, é:

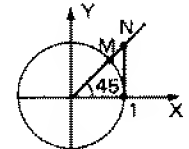
- a) -1 b) -2 c) 0 d) 1 e) 2

TC.56 (CESGRANRIO-76) Na figura o raio OA do círculo vale 6. O segmento OB vale 3 e o segmento CB é perpendicular a OA. A medida, em radianos, do ângulo  $\theta$  é



- a)  $\frac{\pi}{3}$  b)  $\frac{\pi}{6}$  c)  $\frac{\pi}{4}$  d)  $\frac{\pi}{9}$  e)  $\frac{3\pi}{8}$

TC.57 (CESCEA-75) Considere a figura ao lado:



O comprimento do segmento MN é:

- a)  $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$  b)  $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$  c)  $-\sqrt{2} + 1$  d)  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$  e)  $\sqrt{2} - 1$

TC.58 (GV-74) A expressão  $\sqrt{\cos \pi + \log_2 16 - e^{\sin 2\pi}}$  tem o mesmo valor numérico que:

- a)  $2 \sin \frac{\pi}{4}$  b)  $\cos \frac{\pi}{2}$  c)  $\tan \frac{\pi}{4}$  d)  $e^{\cos \pi}$  e)  $\log_e 2$

TC.59 (GV-72) Sabendo-se que  $x+y = \frac{\pi}{3}$  e  $x-y = \frac{\pi}{2}$ , então,  $\sin x + \sin y$  é igual a:

- a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  b) 1 c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  d)  $\frac{1}{2}$  e)  $\sqrt{2}$

TC.60 (CESCEM-75) O seno de um dos ângulos agudos de um losango é igual a  $\frac{1}{2}$  portanto a tangente do maior ângulo interno é:

- a) -1 b)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  c)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  d)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  e)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

TC.61 (FAAP-75) Conhecida a fórmula:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \dots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\sin(nx) \cdot \cos[(n+1)x]}{2 \cdot \sin x}$$

válida para todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\sin x \neq 0$ , então a soma

$$\sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{2\pi}{3} + \sin^2 \frac{3\pi}{3} + \dots + \sin^2 \frac{\pi}{3}$$

- a) 0      b)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       c)  $\frac{1}{2}$       d) 9      e)  $\frac{9}{2}$

TC.62 (CESCEM-74) Dado o ângulo  $\alpha = 1782^\circ$ , então:

- a)  $\sin \alpha = -\sin 18^\circ$ ,  $\cos \alpha = \cos 18^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} 18^\circ$   
 b)  $\sin \alpha = -\sin 18^\circ$ ,  $\cos \alpha = -\cos 18^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} 18^\circ$   
 c)  $\sin \alpha = \sin 18^\circ$ ,  $\cos \alpha = \cos 18^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 18^\circ$   
 d)  $\sin \alpha = \sin 18^\circ$ ,  $\cos \alpha = -\cos 18^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 18^\circ$   
 e)  $\sin \alpha = \sin 18^\circ$ ,  $\cos \alpha = \cos 18^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} 18^\circ$

TC.63 (FEI-66) Se  $\cos x = \frac{3}{5}$ , então  $\sin(x + \frac{\pi}{2})$  é igual a:

- a)  $\frac{3}{5}$       b)  $-\frac{3}{5}$       c)  $\frac{4}{5}$       d)  $-\frac{4}{5}$   
 e) nenhuma das respostas anteriores

TC.64 (MACK-76) Se  $x = \frac{\pi}{5}$ , o valor de  $2 \cos \pi \sin(\pi - x) \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$  é igual a:

- a)  $\cos \frac{2\pi}{5}$       b)  $-\frac{2\pi}{5}$       c)  $\sin \frac{2\pi}{5}$       d)  $-\sin \frac{2\pi}{5}$   
 e) nenhum dos anteriores

TC.65 (GV-75) 
$$\frac{\cos(90^\circ + x) + \cos(180^\circ - x) + \cos(360^\circ - x) + 3 \cos(90^\circ - x)}{\sin(270^\circ + x) - \sin(90^\circ + x) - \cos(90^\circ - x) + \sin(360^\circ + x)}$$

é igual a:

- a)  $\cotg x$       b)  $-\operatorname{tg} x$       c) -1      d) 1  
 e) nenhuma das anteriores

TC.66 (MACK-75) A soma dos 12 primeiros termos da série

$\cos \alpha, \cos(\alpha + \pi), \cos(\alpha + 2\pi) \dots$  é:

- a)  $6 \cos \alpha$       b)  $\cos \alpha$       c) 1      d) 0      e) -1

TC.67 (FFCLUSP-67)  $\log \operatorname{tg} 1^\circ + \log \operatorname{tg} 2^\circ + \log \operatorname{tg} 3^\circ + \dots + \log \operatorname{tg} 89^\circ =$

- a) 0      b) 1      c) 44,5      d) 89  
 e) nenhuma das respostas anteriores

TC.68 (PUC-77) Qual das funções abaixo, é função par?

- a)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$       b)  $f(x) = x$       c)  $f(x) = x^5$       d)  $f(x) = \frac{1}{x}$       e)  $f(x) = \sin x$

TC.69 (CESCEM-71) Dizemos que uma função real é par se  $f(x) = f(-x)$  e que é ímpar se  $f(x) = -f(-x)$ . Das afirmativas que seguem indique qual a falsa:

- a) o produto de duas funções ímpares é uma função ímpar  
 b) o produto de duas funções pares é uma função par  
 c) a soma de duas funções ímpares é uma função ímpar  
 d) a soma de duas funções pares é uma função par  
 e) alguma das afirmações anteriores é falsa

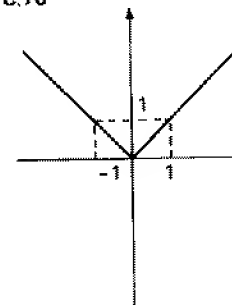
(CESCEM-71) Em cada uma das questões de TC.70 a TC.74 é dado o gráfico de uma função definida em  $\mathbb{R}$ . Dadas as denominações:

- I — função ímpar;  
 II — função não limitada;  
 III — função periódica;  
 IV — função par;  
 V — função identidade.

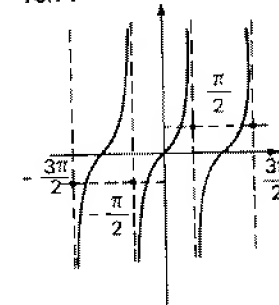
Assinale:

- a) se as denominações I, II e III forem verdadeiras para o gráfico da questão  
 b) se as denominações III e IV forem verdadeiras para o gráfico da questão  
 c) se as denominações I, II e V forem verdadeiras para o gráfico da questão  
 d) se as denominações II e IV forem verdadeiras para o gráfico da questão  
 e) não sei

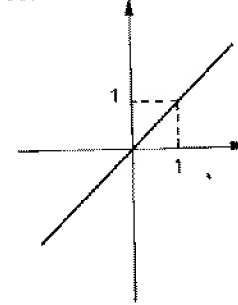
TC.70



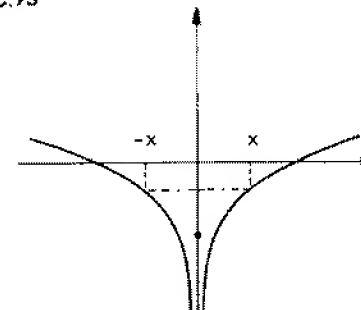
TC.71



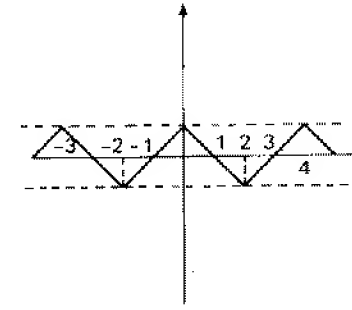
TC.72



TC.73



TC.74



## TRANSFORMAÇÕES

TC.75 (CESCEM-73) Sabe-se que  $\operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$  e  $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ . O valor de  $\operatorname{tg} 15^\circ$  é:

- a)  $\frac{1}{3}$       b)  $-\sqrt{3}$       c)  $\sqrt{3}$       d)  $2 + \sqrt{3}$       e)  $2 - \sqrt{3}$

TC.76 (MACK-75) Se  $0 < a < \frac{\pi}{2}$  e  $0 < b < \frac{\pi}{2}$  então:

- a)  $\sin(a + b) < \sin a + \sin b$  quaisquer que sejam a e b  
b)  $\sin(a + b) > \sin a + \sin b$  quaisquer que sejam a e b  
c)  $\sin(a + b) > \sin a + \sin b$  somente se  $a > b$   
d)  $\sin(a + b) < \sin a + \sin b$  somente se  $a < b$   
e) nenhuma das anteriores

TC.77 (PUC-71) Para todo x real, sempre vale a relação:

- a)  $\sin^2 x - \cos^2 x = -1$       b)  $2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$   
c)  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$       d)  $\operatorname{tg} x = 1 + \sec^2 x$   
e)  $\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$

TC.78 (MACK-74) A expressão:

$$N = \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha \cdot \cos 16\alpha \cdot \cos 32\alpha$$

é equivalente a:

- a)  $N = \sin 63\alpha$       b)  $N = \sin 64\alpha$       c)  $N = \cos 64\alpha$   
d)  $N = \frac{\cos 64\alpha}{2^6}$       e)  $N = \frac{\sin 64\alpha}{2^6}$

TC.79 (FEI-67) O menor período da função  $f(x) = \sin x \cdot \cos x$  é:

- a)  $\pi$       b)  $2k\pi$       c)  $\frac{\pi}{4}$       d)  $\frac{\pi}{2}$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.80 (MACK-77) Sejam as funções  $f_1$  e  $f_2$  de domínio  $\mathbb{R}$ , definidas por

$$f_1(x) = \sin x + \cos x \quad \text{e} \quad f_2(x) = 3 \sin x \cos x.$$

Sejam  $I_1$  e  $I_2$  os conjuntos-imagem de  $f_1$  e  $f_2$ , respectivamente, tem-se que:

- a)  $I_1 \subsetneq I_2$       b)  $I_2 \subsetneq I_1$       c)  $I_1 = I_2$   
d) nenhuma das afirmações acima é correta      e) Não sei

TC.81 (CESCEM-76) Sabe-se que  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ . Portanto,  $\sin 4x =$

- a)  $4 \sin x \cos x$       b)  $4 \sin 2x \cos 2x$       c)  $2 \sin 2x \cos x$   
d)  $2 \sin x \cos 2x$       e)  $2 \sin 2x \cos 2x$

TC.82 (GV-73) Sendo x um arco de quarto quadrante e sendo  $\sin x = -\frac{1}{2}$ , o valor de  $\sin 4x$  é:

- a)  $-\frac{\sqrt{3}}{8}$       b)  $\frac{\sqrt{3}}{8}$       c)  $-\frac{\sqrt{3}}{4}$       d)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$       e)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

TC.83 (CESCEM-70) Se  $\cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$  então o valor de  $\cos 4x$  é:

- a)  $2 \cos^4 x - 1$   
b)  $8(\cos^4 x - \cos^2 x) + 1$   
c)  $4 \cos^2 x - 1$   
d)  $4 \cos^4 x - 2 \cos^2 x + 1$   
e) nenhuma das alternativas anteriores

TC.84 (CESCEA-77) Sabendo-se que  $\cos 2x = \frac{2}{3}$ , então o valor de  $\operatorname{tg}^2 x$  é:

- a)  $\frac{11}{5}$       b) 1      c)  $\frac{3}{5}$       d)  $\frac{6}{5}$       e)  $\frac{1}{5}$

TC.85 (GV-75) Sendo x um arco do primeiro quadrante e  $\sin x = a$ , a expressão:  $2 \cos^2 x + \sin^2 2x$  é igual a:

- a)  $2(1 - 2a^4)$       b)  $-2(-1 + 2a^2 - 2a^4)$   
c)  $2(1 - 2a^2) + 4a\sqrt{1 - a^2}$       d)  $4(1 - a^2 - a^4)$   
e) nenhuma das anteriores

TC.86 Sabendo que  $\sin a = \frac{3}{5}$  e  $\cos a = \frac{4}{5}$ , então  $\sin 2a + \cos 2a$  é igual a:

- a)  $\frac{14}{5}$       b)  $\frac{31}{25}$       c)  $\frac{9}{5}$       d)  $\frac{17}{25}$       e)  $\frac{18}{25}$

TC.87 (CESCEM-77) Sejam f e g funções definidas por  $f(x) = \cos 2x$  e  $g(x) = \sin^2 x - 1$ . Então,  $f(x) + g(x)$  é:

- a)  $-\cos^2 x - 1$       b)  $\sin x(2 \cos x + \sin x) - 1$       c)  $-\sin^2 x$   
d)  $\sin^2 x$       e) 0

TC.88 (MACK-74) O período da função f definida por  $f(x) = \sin^4 x$  é:

- a)  $\frac{\pi}{2}$       b)  $\frac{\pi}{4}$       c)  $\pi$       d)  $2\pi$       e)  $\sqrt[4]{2\pi}$

TC.89 (MACK-74) O período da função  $f(x) = \sin^2 3x - \cos 4x$  é:

- a)  $\frac{\pi}{12}$       b)  $\pi$       c)  $\frac{2\pi}{3}$       d)  $2\pi$       e)  $\frac{5\pi}{6}$

TC.90 (CESCEA-73) A expressão:  $\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$  é idêntica a:

- a)  $\sec 2x$       b)  $\operatorname{tg} 2x$   
c)  $\operatorname{tg} 4x$       d) não sei

TC.91 (CESCEM-73) Seja  $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  podemos afirmar que:

- a)  $f(0) = -1$  e  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$
- b) qualquer que seja  $x$ ,  $f(x)$  está definida e vale  $-1$
- c) se  $x = k\pi$ ,  $f(x) = -1$  e se  $x \neq k\pi$ ,  $f(x) \neq -1$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- d) se  $x \geq 0$ ,  $f(x) = -1$
- e)  $f(x) = -1$  nos pontos onde a função estiver definida

TC.92 (MACK-74) Seja  $w = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha$  com  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , então:

- a)  $w \leq 0,5$
- b)  $-1 \leq w \leq 1$
- c)  $w = 1,5$
- d) o maior valor de  $w$  é 2
- e)  $w \geq 2$

TC.93 (EAESP-GV-77) Se  $\operatorname{tg} x = t$ , então,  $\cos 2x + \sin 2x$  é equivalente a:

- a)  $\frac{(1-t)^2}{1+t^2}$
- b)  $\frac{1-2t-t^2}{1+t^2}$
- c)  $1+t^2$
- d)  $1+2t-t^2$
- e)  $\frac{1+2t-t^2}{1+t^2}$

TC.94 (MACK-69) Outra forma para a expressão  $\frac{3 \cdot \sin 2x}{1 - \cos 2x}$  é:

- a)  $\frac{3}{\operatorname{cotg} x}$
- b)  $\operatorname{cotg} x$
- c)  $\frac{\operatorname{cotg} x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$
- d)  $\frac{\operatorname{cotg} x}{3}$
- e)  $3 \cdot \operatorname{cotg} x$

TC.95 (ITA-94)  $\left[\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}\right]^2$  vale:

- a)  $\frac{1 - 2 \cdot \sin 2x}{1 + \sin 2x}$
- b)  $\frac{1 + 2 \cdot \sin 2x}{1 - \sin 2x}$
- c)  $\frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$
- d)  $\frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}$
- e) nenhuma das respostas anteriores

TC.96 (MACK-76) Se  $\operatorname{tg} x = m$  e  $\operatorname{tg} 2x = 3m$ ,  $m > 0$ , o ângulo agudo  $x$  mede:

- a)  $15^\circ$
- b)  $60^\circ$
- c)  $45^\circ$
- d)  $30^\circ$
- e)  $22^\circ 30'$

TC.97 (ITA-77) Seja  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \log \frac{n\pi}{2}, n = 1, 2, 3, \dots\}$ . Com respeito à função

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \frac{\sin(3e^x)}{\sin e^x} - \frac{\cos(3e^x)}{\cos e^x}$ , podemos afirmar que:

- a)  $f(x) = 2$  para todo  $x$  em  $D$
- b)  $f(x) = 3$  para todo  $x$  em  $D$
- c)  $f(x) = e^3$  para todo  $x$  em  $D$
- d)  $f(x)$  não é constante em  $D$
- e) nenhuma das anteriores

TC.98 (MACK-74) Sendo  $u$  a medida em radianos de um ângulo e  $v = \frac{\pi}{4} - u$ , a expressão

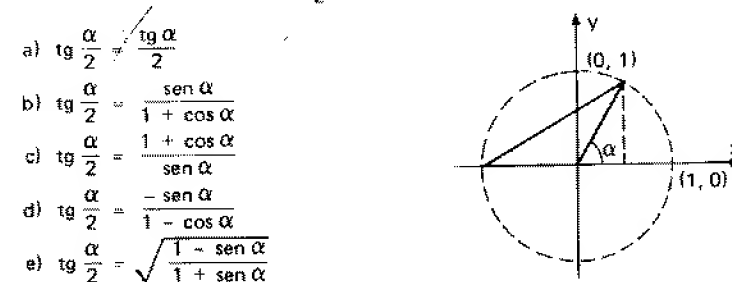
$S = \frac{\sin u + \cos u}{\sqrt{2} \cdot \sin u \cdot \cos u}$  em função de  $x = \cos v$  é:

- a)  $\frac{2x}{x^2 + 1}$
- b)  $\frac{x}{2x^2 + 1}$
- c)  $\frac{2x}{1 - x^2}$
- d)  $\frac{2x}{2x^2 - 1}$
- e)  $\frac{2x}{x^2 + 2}$

TC.99 (UNB-74) Para  $0 \leq t \leq 2\pi$  a expressão:  $\frac{1}{2} \sqrt{2(1 - \cos t)}$  é igual a:

- a)  $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$
- b)  $\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right|$
- c)  $\sin\left(\frac{t}{2}\right)$
- d) nenhuma das anteriores

TC.100 (MACK-73) Seja  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Da figura abaixo pode-se concluir diretamente que:



TC.101 (EESCUSP-68) Se  $\operatorname{cotg} \frac{a}{2} = \sqrt{3}$  então:

- a)  $\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- b)  $\sin a = \frac{\sqrt{2}}{3}$
- c)  $\sin a = \frac{1}{2}$
- d)  $\sin a = 1$
- e) nenhuma das respostas anteriores

TC.102 (CESCEA-69) Se  $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$  então  $\operatorname{tg} a$  vale:

- a)  $\frac{4}{3}$
- b)  $\frac{3}{4}$
- c) 2
- d) 1
- e) -2

TC.103 (PUC-70) Simplificando-se a expressão:  $\frac{1}{1 + \sec x} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$ , obtém-se:

- a)  $\sin x$
- b)  $\cos x$
- c)  $\operatorname{tg} x$
- d)  $\operatorname{cotg} x$
- e)  $\operatorname{cosec} x$

TC.104 (MACK-76) A expressão  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$  para  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , é equivalente a:

- a)  $2 \sin x$
- b)  $2 \sec x$
- c)  $2 \cos x$
- d)  $2 \operatorname{cosec} x$
- e)  $2 \operatorname{tg} x$

TC.105 (FEI-73) Se  $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$  e  $\cos(a_n) = \frac{n}{n+1}$ ,  $\cos(\frac{a_n}{2})$ ; vale:

- a)  $\frac{n}{2(n+1)}$  b)  $\sqrt{\frac{2n+1}{2n+2}}$  c)  $\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{n+1}{n}}$   
 d)  $\frac{2n}{n+1}$  e)  $\frac{1}{n^2}$

TC.106 (FFCLUSP-67) A igualdade  $\operatorname{tg} x = a + b \cotg 2x$  é válida para todo  $x$  real tal que  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ . Então  $a$  e  $b$  valem respectivamente:

- a)  $a = 1$ ,  $b = -2$  b)  $a = -2$ ,  $b = 1$  c)  $a = 1$ ,  $b = 0$   
 d)  $a = 1$ ,  $b = 2$  e)  $a = b$

TC.107 (ITA-75) Sabendo-se que  $\operatorname{sen} x = \frac{m-n}{m+n}$ ,  $n > 0$  e  $m > 0$ , podemos afirmar que

$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$  é igual a:

- a)  $\frac{n}{m}$  b)  $\frac{\sqrt{m}}{n}$  c)  $1 - \frac{n}{m}$   
 d)  $\sqrt{\frac{n}{m}}$  e) nenhuma das anteriores

TC.108 (CESCEA-76) Transformando-se em produto a expressão  $\cos 70^\circ - \sin 60^\circ$  obtém-se:

- a)  $-2 \cos 5^\circ \cos 65^\circ$  b)  $2 \cos 5^\circ \cos 65^\circ$   
 c)  $-2 \sin 40^\circ \sin 20^\circ$  d)  $+2 \sin 40^\circ \cos 20^\circ$   
 e)  $-2 \sin 20^\circ \cos 40^\circ$

TC.109 (GV-74) Assinalar a afirmação verdadeira:

- a)  $\sin 20^\circ + \sin 30^\circ = \sin 50^\circ$   
 b)  $\cos 20^\circ - \cos 10^\circ = \cos 10^\circ$   
 c)  $\sin 20^\circ + \sin 30^\circ = 2 \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 85^\circ$   
 d)  $\cos 20^\circ + \cos 30^\circ = 2 \cdot \cos 25^\circ \cdot \cos 85^\circ$   
 e)  $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ = 1$

TC.110 (GV-73) A expressão  $\sin x - \cos x$  é idêntica a:

- a)  $\sqrt{2} \cdot \sin(x - \frac{\pi}{4})$   
 b)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin(x - \frac{\pi}{2})$   
 c)  $2 \cdot \sin(x + \frac{\pi}{4})$   
 d)  $\sqrt{2} \cdot \sin(x + \frac{\pi}{2})$   
 e)  $\sqrt{3} \cdot \sin(x - \frac{\pi}{3})$

TC.111 (MACK-76) A expressão  $\sin(135^\circ + x) + \sin(135^\circ - x)$  é igual a:

- a)  $\sqrt{2} \sin x$  b)  $\sqrt{3} \cos x$  c)  $-1$  d)  $\sqrt{2} \cos x$  e)  $-\sqrt{2} \sin x$

TC.112 (PUC-75)  $\sin \alpha + 2 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$  é igual a:

- a)  $2 \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  b)  $4 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$   
 c)  $\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$  d)  $3 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$   
 e)  $3 \sin 2 \cdot \cos 2\alpha$

TC.113 (ITA-70) Seja  $P = \sin^2 ax - \sin^2 bx$ . Temos, então que:

- a)  $P = \sin ax \cdot \cos bx$  b)  $P = \cos \frac{a}{2} x \cdot \operatorname{tg} bx$   
 c)  $P = 2 \cdot \sin(\frac{a+b}{2}x) \cdot \cos(\frac{a-b}{2}x)$   
 d)  $P = \sin(a+b)x \cdot \sin(a-b)x$   
 e) nenhuma é válida

TC.114 (MACK-77) O menor valor que  $y$  pode assumir na igualdade  $y = \cos x + \cos 2x$  é:

- a)  $-\frac{3}{4}$  b)  $-\frac{7}{8}$  c)  $-1$  d)  $-\frac{9}{8}$  e) não sei

TC.115 (MACK-74) Sendo  $\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$  e lembrando que  $|\sin z| \leq |z|$ ,  $|\cos t| \leq 1$  e  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ; podemos afirmar que, para quaisquer números  $x$  e  $y$  reais:

- a)  $|\sin x - \sin y| \leq \frac{|x+y|}{2}$  b)  $|\sin x - \sin y| \leq \frac{|x-y|}{2}$   
 c)  $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$  d)  $|\sin x - \sin y| \leq 2|x^2 - y^2|$   
 e) nenhuma das anteriores

TC.116 (GV-75) A expressão  $\frac{\sin(a-x) + \sin(2a-3x)}{\cos(a-x) + \cos(2a-3x)}$  é o mesmo que:

- a)  $-\operatorname{tg}(a - \frac{3}{2}x)$  b)  $\cotg(a - \frac{3}{2}x)$  c)  $-\operatorname{tg}(\frac{3}{2}a - 2x)$   
 d)  $\cotg(\frac{3}{2}a - 2x)$  e) nenhuma das anteriores

TC.117 (MACK-74) Sendo  $u$  a unidade em radianos de um ângulo e  $v = \frac{\pi}{4} - u$ , a expressão:

$S = \frac{\sin u + \cos u}{\sqrt{2} \cdot \sin u \cdot \cos u}$  em função de  $x = \cos v$  é:

- a)  $\frac{2x}{x^2+1}$  b)  $\frac{x}{2x^2+1}$  c)  $\frac{2x}{1-x^2}$  d)  $\frac{2x}{2x^2+1}$  e)  $\frac{2x}{x^2+2}$

TC.118 (PUC-75)  $\cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{8\pi}{12}$  vale:

- a)  $-\frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3}+1)$  b)  $-\frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3}-1)$  c)  $-\frac{\sqrt{2}}{8}(1-\sqrt{3})$   
 d)  $-\frac{\sqrt{2}}{8}(2\sqrt{3}-1)$  e)  $-\frac{\sqrt{2}}{8}(1-2\sqrt{3})$

TC.119 (MACK-75) Simplificando-se:  $4 \cdot \sin \alpha \cdot \sin (60^\circ - \alpha) \cdot \sin (60^\circ + \alpha)$  obtém-se:

- a)  $\sin \alpha$       b)  $\sin 3\alpha$       c)  $\sin 2\alpha$       d)  $\sin 5\alpha$       e)  $\sin 4\alpha$

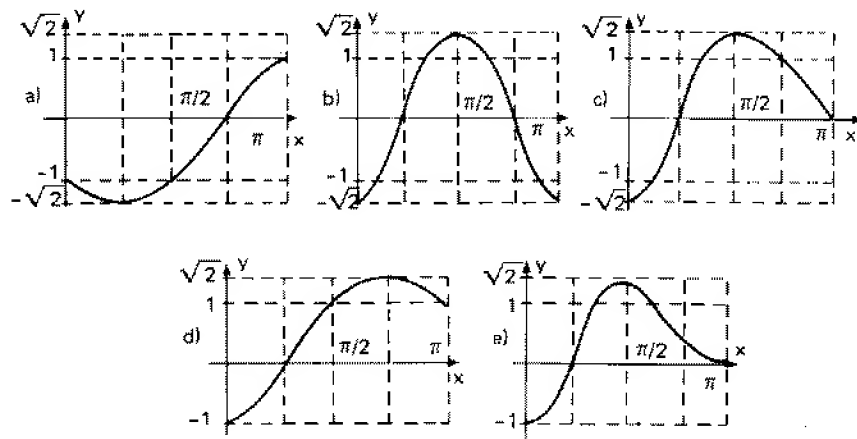
TC.120 (ITA-69) Para que valores de  $t$  o sistema

$$\begin{cases} x + y = \pi \\ \sin x + \sin y = \log_{10} t^2 \end{cases}$$

admite solução:

- a)  $0 < t < 10$       b)  $0 < t < 10\pi$       c)  $0 < t < 10^2$   
d)  $0,1 < t \leq 10$       e) nenhum dos intervalos anteriores

TC.121 (GV-75) O gráfico de  $y = \sin x - \cos x$ , para  $0 \leq x \leq \pi$  é:



## EQUAÇÕES

TC.122 (FUVEST-77) No intervalo  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ , a equação

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} + \cos x = -\sqrt{2}$$

- a) não admite solução      b) admite como solução  $x = \frac{3\pi}{4}$   
c) admite como solução  $x = \frac{2\pi}{3}$       d) admite como solução  $x = \frac{5\pi}{6}$   
e) admite como solução  $x = \pi$

TC.123 (PUC-76) Os valores de  $x$  que satisfazem a equação  $\cos(3x - \frac{\pi}{5}) = 0$ , são:

- a)  $x = \frac{7\pi}{30} + k\frac{\pi}{3}$ ;  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$   
b)  $x = \frac{7\pi}{15} + k\frac{\pi}{3}$ ;  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$   
c)  $x = \frac{7\pi}{2} + k\frac{\pi}{4}$ ;  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$   
d)  $x = \frac{7\pi}{5} + k\frac{\pi}{2}$ ;  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$   
e)  $x = \frac{7\pi}{4} + k\frac{\pi}{6}$ ;  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

TC.124 (MACK-76) O menor valor positivo de  $x$ , para o qual  $9^{-\cos x} = \frac{1}{3}$ , é:

- a)  $\frac{\pi}{6}$       b)  $\frac{\pi}{4}$       c)  $\frac{\pi}{3}$       d)  $\frac{\pi}{2}$       e)  $\frac{2\pi}{3}$

TC.125 (CESCEM-73) Se o ponto  $(x_0; y_0)$  pertence ao gráfico da função  $y = \operatorname{tg} x$ , então uma condição necessária e suficiente para que o ponto  $(a; y_0)$  também pertença a este gráfico é:

- a)  $a = \operatorname{tg} x_0$       b) que  $(a - x_0)$  seja múltiplo de  $\pi$   
c)  $a = \frac{\pi}{2}$       d)  $a = \operatorname{arctg} x_0$   
e)  $(a - x_0) = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

TC.126 (EESCUSP-68) As soluções da equação  $\sin \pi x = \sin[\pi \cdot (2x + 1)]$  são da forma:

- a)  $x = \frac{a}{3}$  onde  $a$  é inteiro  
b)  $x =$  qualquer inteiro positivo  
c)  $x = \frac{a}{2}$  onde  $a$  é natural  
d)  $x =$  qualquer racional  
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.127 (ITA-77) Resolvendo a equação  $\operatorname{tg}(2 \log x - \frac{\pi}{6}) = \operatorname{tg}(\log x + \frac{\pi}{3}) = 0$  temos:

- a)  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$   
b)  $x = e^{\pi/2 \pm k\pi}$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$   
c)  $\log x = \frac{\pi}{6} \pm k\pi$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$   
d)  $x = e^{\pi/6 \pm 2k\pi}$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$   
e) nenhuma das anteriores

TC.128 (CESGRANRIO-77) O número de raízes da equação  $\cos x + \sin x = 0$

no intervalo  $[\pi, 3\pi]$  é:

- a) 2      b) 1      c) 3      d) 4      e) 0

TC.129 (MACK-75) Se  $\operatorname{tg} 4x + \operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$  para  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , então  $x$  pode ser igual a:

- a)  $\frac{\pi}{16}$       b)  $\frac{3\pi}{24}$       c)  $\frac{5\pi}{24}$       d)  $\frac{7\pi}{24}$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.130 (CESCEA-70) Se  $a$  é a menor raiz positiva da equação  $(\operatorname{tg} x - 1) \cdot (4 \cdot \operatorname{sen}^2 x - 3) = 0$  então, o valor de  $\operatorname{sen}^4 a - \cos^2 a$  é

- a)  $\frac{5}{16}$       b) 0      c)  $-\frac{1}{4}$       d)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       e)  $-\frac{1}{2}$

TC.131 (CESCEA-75) A soma das raízes da equação  $1 - 4 \cdot \cos^2 x = 0$ , compreendidas entre 0 e  $\pi$  é:

- a)  $\frac{\pi}{3}$       b)  $\pi$       c)  $\frac{3\pi}{4}$       d)  $\frac{5\pi}{6}$       e)  $\frac{7\pi}{6}$

TC.132 (CESGRANRIO-76) No intervalo  $[0, 6\pi]$  a equação trigonométrica

$$\cos 2x + 2 \operatorname{sen}^2 x + 2 = 0$$

- a) possui uma infinidade de raízes      b) possui exatamente duas raízes  
c) não possui raízes      d) possui uma única raiz  
e) possui exatamente três raízes

TC.133 (ITA-69) A equação  $\operatorname{sen}^2 \frac{3x}{2} - \cos \frac{3x}{2} = a$  tem solução para valores particulares de  $a$ . Assinale o item que lhe parecer correto:

a)  $1 < a < \frac{7}{4}$

b)  $-2 < a < \frac{5}{4}$

c)  $-1 < a < \frac{1}{4}$

d)  $1 < a < \frac{3}{2}$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.134 (CESCEM-73) Os valores de  $x$  entre 0 e  $2\pi$  que satisfazem a equação:  $2 \cdot \operatorname{sen}^2 x + |\operatorname{sen} x| - 1 = 0$  são:

a) aqueles para os quais  $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$  ou  $\operatorname{sen} x = -1$

b)  $x = \frac{\pi}{6}$ ;  $x = \frac{5\pi}{6}$ ;  $x = \frac{7\pi}{6}$ ;  $x = \frac{11\pi}{6}$

c)  $x = \pi$

d)  $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ;  $k \in \mathbb{Z}$

e)  $x = \frac{\pi}{6}$ ;  $x = \frac{5\pi}{6}$ ;  $x = \frac{3\pi}{2}$

TC.135 (GV-75) A solução da equação:  $\frac{625 \cos^2 x}{25 \cos x} = 1$  para  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  é:

a)  $x = 0$

b)  $x = \frac{\pi}{6}$

c)  $x = 0$  ou  $x = \frac{\pi}{6}$

d)  $x = \frac{\pi}{3}$

e)  $x = \frac{\pi}{2}$  ou  $x = \frac{\pi}{3}$

TC.136 (GV-73) Dada a equação  $\cos^2 x - 2 \cdot \sec^2 x = 1$ , com  $0 \leq x \leq \pi$ , então

a)  $x = \frac{\pi}{4}$       b)  $x = \frac{3\pi}{4}$       c)  $x = 0$

d) não existe  $x$  que satisfaz a equação

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.137 (GV-75) O conjunto de todas as soluções da equação  $\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x$ , é o conjunto dos números  $x$  tais que,  $x$  é igual a:

a)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$       b)  $2k\pi$       c)  $k\pi$       d)  $k\pi + \frac{3\pi}{2}$

e) nenhuma das anteriores

TC.138 (CESCEM-73) Em função de um número  $k$  inteiro relativo, todas as soluções da equação:

$$\cos^4 \alpha + \operatorname{sen}^4 \alpha - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1$$

são dadas por:

a)  $\alpha = \frac{k\pi}{2}$       b)  $\alpha = k\pi$       c)  $\alpha = \frac{k\pi}{4}$       d)  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$       e)  $\alpha = 2k\pi$

TC.139 (CESCEM-72) A expressão:  $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$

- a) é uma equação trigonométrica que só admite raízes no primeiro quadrante  
b) é uma equação trigonométrica que só admite um número finito de raízes  
c) é uma identidade trigonométrica  
d) é uma equação trigonométrica que só admite raízes positivas  
e) é uma equação trigonométrica que não admite raízes

TC.140 (ITA-71) Qual é o menor valor de  $x$  que verifica a equação  $\operatorname{tg} x + 3 \cdot \cotg x = 3$ ?

a)  $x = \frac{\pi}{4}$

b) para todo  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

c) para nenhum valor de  $x$

d) para todo valor de  $x \neq n \cdot \frac{\pi}{2}$  onde  $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

e) apenas para  $x$  no terceiro quadrante



TC.141 (MACK-77) Os dois ângulos agudos de um triângulo retângulo não isósceles são raízes da equação (em x):

$$3 \operatorname{tg} x + k^2 \cotg x = 4k.$$

Então:

- a)  $k = 1$       b)  $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$       c)  $k = \sqrt{3}$       d)  $k = \frac{1}{3}$       e) Não sei

TC.142 (UNB-74) Se  $\sec^2 x + \operatorname{tg} x - 7 = 0$  e  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  então:

- a)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$       b)  $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$       c)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$       d) nenhuma das anteriores

TC.143 (CESCEA-71) O conjunto solução da equação  $3 \cdot \operatorname{tg}^2 x + 5 = \frac{7}{\cos x}$ , no intervalo fechado  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  é:

- a)  $\{-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, 0\}$       b)  $\{\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\}$       c)  $\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$   
d)  $\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\}$       e) não sei

TC.144 (FEI-73) A equação  $\sin 2x = \sin x$ , no intervalo  $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$  tem:

- a) nenhuma solução      b) 2 soluções      c) 3 soluções      d) 4 soluções      e) 5 soluções

TC.145 (ITA-72) Assinale uma solução para a equação trigonométrica

$$\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = \sqrt{3}$$

- a)  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$   
b)  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$   
c)  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$   
d)  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.146 (ITA-73) Seja a equação  $(\log_e m) \cdot \sin x \pm \cos x = \log_e m$ . Quais as condições sobre m para que a equação admita solução?

- a)  $m > 0$  se  $x = (2k + \frac{1}{2})\pi$ ,  $m > 0$  e  $m \neq 1$  se  $x \neq (2k + \frac{1}{2})\pi$   
b)  $m \neq 0$  se  $x = (2k + \frac{1}{2})\pi$ ,  $m \geq 0$  e  $m \neq e$  se  $x \neq (2k + \frac{1}{2})\pi$   
c)  $m > e$  se  $x = (2k + \frac{1}{2})\pi$ ,  $m \geq 1$  se  $x \neq (2k + \frac{1}{2})\pi$   
d)  $m > -\frac{1}{e}$  e  $m \neq 0$  se  $x = (2k + \frac{1}{2})\pi$ ,  $m \neq 0$  se  $x \neq (2k + \frac{1}{2})\pi$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.147 (PUC-73) Se  $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 1 - \sin 2x$ , então os valores de x são:

- a)  $k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )      b)  $2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )  
c)  $2k\pi + \pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )      d)  $2k\pi - \pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )  
e)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

TC.148 (MACK-74)  $f(x) = \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) + \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$  é

- a) igual a 1 para todo x real;  
b) igual a 1 exclusivamente para  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ , k sendo inteiro  
c) igual a 1 só para  $x = 0$   
d) periódica de período  $\frac{\pi}{2}$   
e) sempre diferente de 1

TC.149 (POLI-68) No intervalo  $0 \leq x \leq 2\pi$  o número de soluções da equação trigonométrica  $\cos^9 x + \cos^8 x + \cos^7 x + \dots + \cos x + 1 = 0$

- a) é zero  
b) é um  
c) é dois  
d) é quatro  
e) nenhuma das anteriores

TC.150 (ITA-71) A equação  $\{\sin(\cos x)\} \cdot \{\cos(\cos x)\} = 1$  é satisfeita para:

- a)  $x = \frac{\pi}{4}$       b)  $x = 0$   
c) nenhum valor de x      d) todos os valores de x  
e) todos os valores de x pertencentes ao terceiro quadrante

TC.151 (GV-72) Sendo  $0 < x < \pi$ , a equação  $2 \log \sin x + \log 2 = 0$  tem por solução

- a)  $\frac{\pi}{4}$       b)  $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$       c)  $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$       d)  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$       e) nenhuma das anteriores

TC.152 (ITA-72) Quais condições devem satisfazer a e k para que a seguinte igualdade tenha sentido?

$$\log(\sec a) = k$$

- a)  $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ ,  $k \geq 0$       b)  $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ ,  $k < 0$   
c)  $-\frac{\pi}{2} < a \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $k > 0$       d)  $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}$ ,  $k \geq 0$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.153 (MACK-77) O número de soluções reais da equação  $x^2 - x - \cos x = 0$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$  é:

- a) 0      b) 1      c) 2      d) 3      e) Não sei

TC.154 (SANTA CASA-77) O menor valor de  $x$  que satisfaz à equação  $\log x = \cos x$  está entre:

- a) 0 e 1      b) 1 e 1,6      c) 1,6 e 2,4      d) 2,4 e 3,2      e) 3,2 e 4,0

TC.155 (ITA-71) Dada a equação  $\log(\cos x) = \operatorname{tg} x$ , as soluções desta equação em  $x$  satisfazem a relação:

- a)  $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2$       b)  $0 < x < \frac{\pi}{2}$       c)  $0 < x < \pi$   
d)  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$       e) nenhuma das respostas anteriores

TC.156 (ITA-76) Resolvendo a equação

$$3 \sin^2(e^x) - 2\sqrt{3} \cdot \sin(e^x) \cdot \cos(e^x) - 3 \cos^2(e^x) = 0$$

obtemos:

- a)  $e^x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$   
b)  $x = \log_e(2k\pi \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\pi)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$   
c)  $e^x = k\pi + \frac{\pi}{3}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$   
d)  $x = \log_e(\frac{k}{2}\pi - \frac{\pi}{6})$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.157 (ITA-73) Seja a equação  $3 \operatorname{tg} 3x = [3(\log_e t)^2 - 4 \log_e t + 2] \operatorname{tg} x$ ,  $x \neq n\pi$ . Quais as condições sobre  $t$  para que a equação acima admita solução?

- a)  $0 < t < \frac{1}{e^3}$  ou  $\frac{1}{e^3} < t < e$  ou  $t > e^3$   
b)  $\frac{1}{e^3} \leq t \leq e^2$  ou  $0 < t < e$   
c)  $\frac{1}{e^4} < t \leq e^3$  ou  $\frac{1}{e} > t$   
d)  $t > 0$  e  $t \neq 1$   
e) nenhuma das anteriores

## FUNÇÕES CIRCULARES INVERSAS

TC.158 (MACK-74) Sejam  $f$ ,  $g$  e  $h$  funções de  $A$  em  $A$ , onde  $A = [-1, 1]$ , assim definidas:

$$f(x) = \sin x; \quad g(x) = \sin \pi x; \quad h(x) = \frac{\pi}{2} x.$$

Podemos afirmar que:

- a) todas são inversíveis      b) todas são sobrejetoras  
c) só uma é injetora      d) só uma é sobrejetora  
e) só uma é injetora e sobrejetora

TC.159 (MACK-73) O domínio da função definida por  $y = \arcsin(\sqrt{2x-3})$  é:

- a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\}$       b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} \leq x \leq 2\}$   
c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$       d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0 \text{ ou } \frac{5}{2} \leq x \leq 4\}$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.160 (MACK-77) O valor de  $\arcsin(\cos \frac{33\pi}{5})$  é:

- a)  $\frac{3\pi}{5}$       b)  $-\frac{\pi}{10}$       c)  $\frac{\pi}{10}$       d)  $-\frac{3\pi}{5}$       e) não sei

TC.161 (MACK-74) O valor de  $\operatorname{tg} 2(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2})$  é:

- a)  $\sqrt{2}$       b)  $-\sqrt{3}$       c)  $-\sqrt{2}$       d)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       e)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

TC.162 (PUC-71) Estando as determinações dos arcos compreendidas entre  $0$  e  $\frac{\pi}{2}$ , então o valor da expressão

$$y = \sin(\arcsin \frac{1}{1+a^2} + \arcsin \frac{1}{1+a^2}) \text{ é:}$$

- a)  $\frac{1}{2}$       b) 1      c) 3      d)  $\frac{2}{3}$       e) 0

TC.163 (ITA-72) Para todo  $\alpha$  e  $\beta$ ;  $|\beta| < 1$ , a expressão  $\operatorname{tg}(\arcsin \alpha + \arcsin \beta)$  é igual a:

- a)  $\frac{-\beta + \alpha\sqrt{1-\beta^2}}{\alpha\beta - \sqrt{1-\beta^2}}$       b)  $\frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta + \sqrt{1-\beta^2}}$   
c)  $\frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta\sqrt{\beta^2-1} - 1}$       d)  $\frac{\sqrt{1-\beta^2}(\alpha - \beta)}{\alpha\beta - 1}$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.164 (PUC-70)  $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$  é igual:

- a)  $\frac{3\pi}{2}$       b)  $\frac{\pi}{3}$       c)  $\frac{\pi}{2}$       d)  $\frac{\pi}{4}$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.165 (LINS-67) Admitindo a variação de  $\arcsin x$  no intervalo fechado  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , a solução da equação  $\arcsin x = 2 \arcsin \frac{1}{2}$  é:

- a)  $x = -2$   
b)  $x = 1$   
c)  $x = \pi$   
d)  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.166 (MACK-75) O conjunto solução de  $\arcsen 2x - 3 \arcsen x = 0$  tem:

- a) 0 elementos      b) 1 elemento      c) 2 elementos  
d) 3 elementos      e) 4 elementos

TC.167 (VALEPARAIBANA-72-SJC) Resolvendo a equação

$$\arctg\left(\frac{1+e^x}{2}\right) + \arctg\left(\frac{1-e^x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

obtemos:

- a)  $x = 0$       b)  $x = \pm 1$       c)  $x = \pm 2$       d)  $x = \pm 3$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.168 (MACK-76) Sendo  $f(x) = \arcsen x$  e  $g(x) = 1 + \cotg^2 x$ , o valor de  $(g \circ f)\left(\frac{1}{3}\right)$  é:

- a)  $\frac{17}{9}$       b)  $\frac{1}{9}$       c)  $\frac{8}{9}$       d) 1      e) 9

TC.169 (ITA-71) Consideremos a equação  $\{\log_e(\sen x)\}^2 - \log_e(\sen x) - 6 = 0$  a(s) solução(es) da equação acima é dada por:

- a)  $x = \arcsen(e^2)$  e  $x = \arcsen(3)$       b)  $x = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$  e  $x = \arcsen\left(\frac{1}{3}\right)$   
c)  $x = \arcsen(e^2)$  e  $x = \arcsen(3)$       d)  $x = \arcsen\left(\frac{1}{e^2}\right)$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.170 (ITA-75) Seja  $S = \log_3(\tg x_1) + \log_3(\tg x_2) + \log_3(\tg x_3) + \dots$  onde

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \text{ e } x_{n+1} = \arcsen(\sqrt{\tg x_n}) \cdot n = 2, 3, \dots$$

Nestas condições, podemos assegurar que:

- a)  $S = \log_3(\tg x_1 + \tg x_2 + \tg x_3 + \dots)$       b)  $S = -1$       c)  $S = 2$   
d)  $S = 1$       e) nenhuma das anteriores

TC.171 (ITA-72) Consideremos a função  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sen x)^n$ , onde  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Para

que valores de  $x$  temos  $10 \leq S(x) \leq 20$ ?

- a)  $\arcsen \frac{9}{10} \leq x \leq \arcsen \frac{19}{20}$   
b)  $\arcsen \frac{10}{9} \leq x \leq \arcsen \frac{20}{19}$   
c)  $\arcsen \frac{10}{11} \leq x \leq \arcsen \frac{20}{21}$   
d)  $\arcsen \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \arcsen \frac{\sqrt{3}}{2}$   
e) nenhuma das respostas anteriores

## INEQUAÇÕES

TC.172 (CESCEA-74) A solução da desigualdade  $\sen^2 x - \frac{1}{2} \geq 0$  no intervalo  $[0, \pi]$  é:

- a)  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  ou  $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi$   
b)  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$   
c)  $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$   
d)  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$  ou  $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi$   
e) não sei

TC.173 (CESCEM-72) Considere a desigualdade  $\sen x + \sen^2 x > 0$ ; pode-se afirmar que:

- a) só está satisfeita para  $x$  no primeiro quadrante  
b) só está satisfeita para  $x$  entre 0 e  $\pi$   
c) a desigualdade que se obtém substituindo-se  $x$  por  $-x$  é equivalente à desigualdade dada  
d) os valores de  $x$  que a satisfazem são precisamente aqueles para os quais  $\sen x > 0$   
e) existe  $x$  no terceiro quadrante que satisfaz a desigualdade

TC.174 (CESCEA-71) A solução da inequação  $\sen^2 x < 2 \sen x$ , no intervalo fechado  $[0, 2\pi]$  é:

- a)  $0 < x < 2\pi$       b)  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$       c)  $0 < x < \pi$   
d)  $0 < x < \frac{\pi}{2}$       e) não sei

TC.175 (GV-72) A solução da inequação  $\sqrt{2} \cdot \cos^2 x > \cos x$  no intervalo  $[0, \pi]$  é:

- a)  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  ou  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$       b)  $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$  ou  $\frac{2\pi}{3} \leq x < \pi$   
c)  $0 < x < \frac{\pi}{6}$  ou  $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$       d)  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$   
e) nenhuma das anteriores

TC.176 (MACK-75) Para  $0 \leq x \leq 2\pi$ , o conjunto-solução de  $(\sen x + \cos x)^2 > 1$  é:

- a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}\}$   
b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi < x < \frac{3\pi}{2}\}$   
c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\}$   
d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\}$   
e)  $\emptyset$

TC.177 (ITA-76) A inequação  $4 \sin^2 x - 2(1 + \sqrt{2}) \sin x + \sqrt{2} < 0$  tem uma solução  $x$ , tal que:

- a)  $45^\circ < x < 60^\circ$       b)  $0^\circ < x < 30^\circ$       c)  $35^\circ < x < 45^\circ$   
d)  $60^\circ < x < 75^\circ$       e) nenhuma das respostas anteriores

TC.178 (MACK-73) Se  $0 \leq \alpha \leq \pi$  e, para todo  $x$  real,  $x^2 + x + \operatorname{tg} \alpha > \frac{3}{4}$  então:

- a)  $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$       b)  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$       c)  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$   
d)  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$       e) não existe  $\alpha$  nestas condições

TC.179 (CESCEA-71) A solução da inequação  $\sin 2x + (\sec^2 x - \frac{1}{3}) \leq 0$ , no intervalo fechado  $[0, 2\pi]$  é:

- a)  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$  ou  $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$   
b)  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  ou  $\pi \leq x < \frac{3\pi}{2}$   
c)  $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$  ou  $\frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi$   
d)  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$  ou  $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$   
e) não sei

TC.180 (CESCEA-75) Os valores de  $x \in ]0, \pi[$  para os quais  $(1 + \sin x) \cdot (1 - \cos x) \cdot (\frac{\pi}{2} - x) < 0$  são tais que:

- a)  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$   
b)  $x \neq \frac{\pi}{2}$   
c)  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$   
d)  $0 < x < \frac{\pi}{2}$   
e)  $0 < x < \pi$

TC.181 (MACK-73) Os pontos da circunferência trigonométrica, correspondentes às soluções do sistema:

$$\begin{cases} \sin 2x > 0 \\ \cotg x < 0 \end{cases}$$

- a) estão todos no primeiro quadrante  
b) estão todos no segundo quadrante  
c) estão todos no terceiro quadrante  
d) estão todos no quarto quadrante  
e) não existem

TC.182 (S. CARLOS-68) A inequação  $|\cos x| \geq \sin x$ ,  $0 < x < 2\pi$  é válida se e somente se:

- a)  $0 < x < \frac{\pi}{2}$       b)  $0 \leq x \leq 2\pi$   
c)  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  e  $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq 2\pi$       d)  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$   
e)  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}$

TC.183 (MAUÁ-69) Todos os arcos entre 0 e  $2\pi$  radianos que satisfazem à desigualdade  $\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x > \sqrt{2}$  estão compreendidos entre:

- a)  $\frac{\pi}{12}$  e  $\frac{7\pi}{12}$  radianos      b)  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{7\pi}{6}$  radianos  
c)  $\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{\pi}{2}$  radianos      d) nenhuma das respostas anteriores

TC.184 (ITA-71) Seja  $n$  um número inteiro  $n > 1$  e  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Qual afirmação abaixo é sempre verdadeira?

- a)  $(1 - \sin x)^n \geq 1 - n \cdot \sin x$   
b)  $(1 - \sin x)^n \geq 1 - n \cdot \sin x$ , para apenas  $n$  par  
c)  $(1 - \sin x)^n \leq 1 - n \cdot \sin x$   
d)  $(1 - \sin x)^n \leq 1 - n \cdot \cos x$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.185 (GV-75) Para que  $y = \log(1 - \sin^2 x)$  tenha valores reais, devemos ter, para  $k$  inteiro:

- a)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$   
b)  $(2k - 1)\pi < x < 2k\pi$   
c)  $2k\pi < x < (2k + 1)\pi$   
d)  $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$   
e)  $k\pi < x < (k + 1)\pi$

TC.186 (MACK-74) Sendo  $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$  e lembrando que  $|\sin z| \leq |z|$ ,  $|\cos t| \leq 1$  e  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ , podemos afirmar que, para quaisquer números  $x$  e  $y$  reais:

- a)  $|\sin x - \sin y| \leq \frac{|x+y|}{2}$   
b)  $|\sin x - \sin y| \leq \frac{|x-y|}{2}$   
c)  $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$   
d)  $|\sin x - \sin y| \leq 2|x^2 - y^2|$   
e) nenhuma das afirmações acima é verdadeira

TC.187 (ITA-76) A respeito do produto

$$P = (\sec(bx) + \operatorname{cosec}(bx))(\cos(bx) + \sec(bx))(\operatorname{tg}(bx) + \cotg(bx))$$

podemos afirmar que:

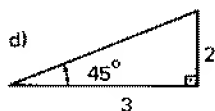
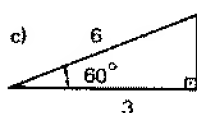
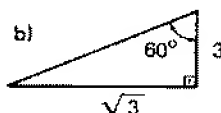
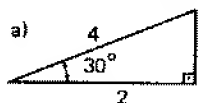
- a) P é positivo, para todo x real e  $b > 0$
- b) P pode ser negativo ou positivo, dependendo da escolha de x e b em  $\mathbb{R}$
- c) P é negativo para  $x = k\pi$  e  $b < 0$  ou P é positivo para  $x = k\pi$  e  $b > 0$ , quando  $k = 1, 2, \dots$
- d) P é positivo, quando  $bx \neq \frac{k}{2}\pi$ , para todo  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- e) nenhuma das respostas anteriores

TC.188 (ITA-68) Seja  $y = a \log \operatorname{tg} x$  com  $0 < a < 1$ , onde  $\log u$  indica o logaritmo neperiano de u. Então,  $\log y \geq 0$  se:

- a)  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$  e  $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$
- b)  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  e  $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$
- c)  $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$  e  $\pi < x \leq \frac{5\pi}{4}$
- d)  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  e  $\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$
- e)  $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$

## TRIÂNGULOS

TC.189 (CESCEA-74) Entre os triângulos retângulos abaixo, um e somente um apresenta os dados corretos. Assinale-o:

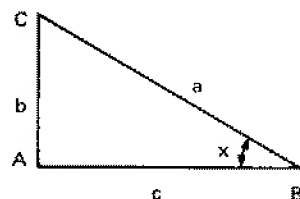


e) não sei

TC.190 (CESCEM-75) Considerando o triângulo retângulo ABC, abaixo, com as seguintes dimensões:

$a = 7,5 \text{ m}$ ;  $b = 4,5 \text{ m}$ ;  $c = 6 \text{ m}$ ; pode-se afirmar que o valor da "tg x" é igual a:

- a) 1,25
- b) 1,33...
- c) 1,66...
- d) 0,75
- e) 0,6



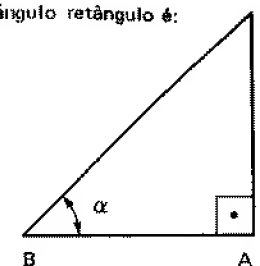
TC.191 (CESCEA-77) A soma dos catetos do triângulo retângulo é:

Dados:

$$\overline{BC} = 10$$

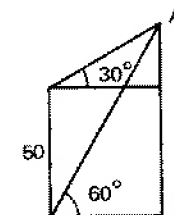
$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

- a) 14
- b) 12
- c)  $10\sqrt{3}$
- d) 16
- e) 10



TC.192 (MACK-77) Na figura ao lado, AB vale:

- a) 60
- b) 65
- c) 70
- d) 75
- e) não sei

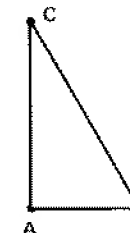


TC.193 (EPUSP-66) AB é a hipotenusa de um triângulo retângulo ABC. A mediana AD mede 7 e a mediana BE mede 4. O comprimento AB é igual a:

- a)  $2\sqrt{13}$
- b)  $5\sqrt{2}$
- c)  $5\sqrt{3}$
- d) 10
- e) nenhuma das respostas anteriores

TC.194 (GV-70) No triângulo ABC ao lado sabemos que

$$\begin{aligned} \hat{A} &= 90^\circ \\ \hat{B} &= 60^\circ \\ AB &= 50 \text{ cm} \end{aligned}$$

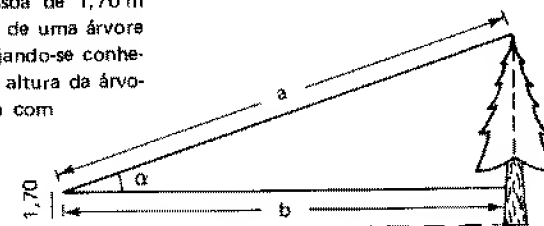


então o segmento AC mede

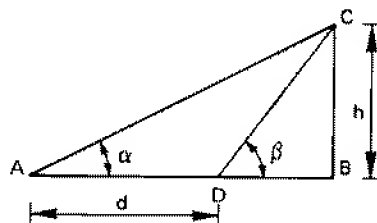
- a) 25 cm
- b)  $\frac{50\sqrt{3}}{3}$  cm
- c) 100 cm
- d)  $50\sqrt{3}$  cm
- e)  $\frac{50\sqrt{2}}{2}$  cm

TC.195 (CESCEM-76) Uma pessoa de 1,70 m de altura observa o topo de uma árvore sob um ângulo  $\alpha$ . Desejando-se conhecer, aproximadamente, a altura da árvore, deve-se somar 1,70 m com

- a)  $b \operatorname{tg} \alpha$
- b)  $a \operatorname{tg} \alpha$
- c)  $b \cos \alpha$
- d)  $a \cos \alpha$
- e)  $b \sin \alpha$



TC.196 (CESCEA-76) Na figura abaixo

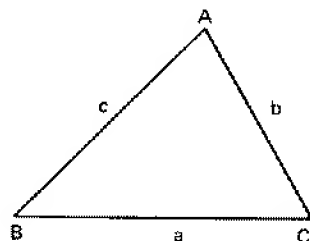


$AD = d$ ,  $BC = h$ ,  $\widehat{CAD} = \alpha$ ,  $\widehat{CDB} = \beta$ . Então:

- a)  $h = \frac{d}{\cotg \alpha + \cotg \beta}$
- b)  $h = \frac{d}{\tg \alpha - \tg \beta}$
- c)  $h = \frac{d}{\cotg \alpha - \cotg \beta}$
- d)  $h = \frac{d}{\tg \alpha + \tg \beta}$
- e)  $h = \frac{d}{\cotg \alpha + \tg \beta}$

TC.197 (CESCEA-73) No triângulo ABC da figura, tem-se  $b = 2$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ , e  $\widehat{C} = 60^\circ$ . Então o lado a mede:

- a)  $\sqrt{3} - 1$
- b)  $2 + \sqrt{2}$
- c)  $1 + \sqrt{3}$
- d)  $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

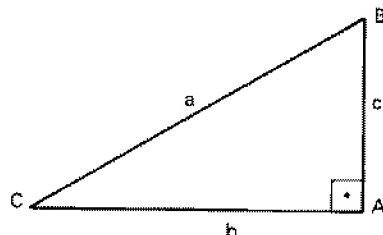


TC.198 (CESCEM-72) Num triângulo retângulo em que um cateto vale 1 e o outro vale  $\tg \varphi$  a hipotenusa vale:

- a)  $|\sec \varphi|$
- b)  $\sec \varphi$
- c)  $\cos \varphi$
- d)  $\sin \varphi$
- e)  $\operatorname{cosec} \varphi$

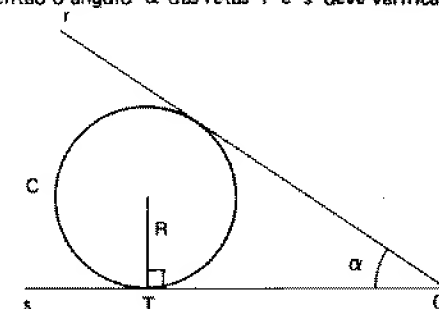
TC.199 (GV-73) Considere o triângulo retângulo e indique por S a sua área. Assinale a afirmação verdadeira

- a)  $\tg \widehat{C} = \frac{b}{c}$
- b)  $c = a \sin \widehat{B}$
- c)  $S = b^2 \tg \widehat{C}$
- d)  $S = \frac{a^2 \cdot \sin 2\widehat{B}}{4}$
- e)  $\cos \widehat{B} = \frac{b}{c}$



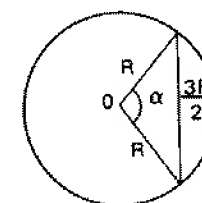
TC.200 (ITA-75) Se, na figura abaixo, c é uma circunferência de raio R, r e s são retas tangentes à circunferência e  $\overline{OT} = 2R$ , então o ângulo  $\alpha$  das retas r e s deve verificar uma das alternativas seguintes:

- a)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  e  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$
- b)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  e  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$
- c)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$
- d)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$
- e) nenhuma das respostas anteriores



TC.201 (SANTA CASA-73) Em relação ao ângulo central  $\alpha$ , pode-se dizer que:

- a)  $\sin \alpha = \frac{3}{8}$
- b)  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$
- c)  $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$
- e)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$



TC.202 (MAUÁ-68) Num triângulo ABC cujos ângulos são designados por A, B e C, supõe-se que  $2 \cdot \tg \widehat{A} = \tg \widehat{B} + \tg \widehat{C}$  e  $0 < \widehat{A} < \frac{\pi}{2}$ . Nesse triângulo vale a relação:

- a)  $\tg \widehat{B} \cdot \tg \widehat{C} = 3$
- b)  $\cos (\widehat{B} + \widehat{C}) = 2 \cdot \cos A$
- c)  $\cos (\widehat{B} - \widehat{C}) = 2 \sec \widehat{A}$
- d)  $\tg \widehat{B} \cdot \tg \widehat{C} = \sqrt{3}$

TC.203 (ITA-77) Considere um triângulo ABC cujos ângulos internos  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$  verificam a relação  $\sin \widehat{A} = \tg \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$ . Então podemos afirmar que:

- a) com os dados do problema, não podemos determinar  $\widehat{A}$  nem  $\widehat{B}$  e nem  $\widehat{C}$
- b) um desses ângulos é reto
- c)  $\widehat{A} = \frac{\pi}{6}$  e  $\widehat{B} + \widehat{C} = \frac{5\pi}{6}$
- d)  $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$ ,  $\widehat{B} = \frac{\pi}{4}$ ,  $\widehat{C} = \frac{5\pi}{12}$
- e) nenhuma das anteriores

TC.204 (GV-73) Em um triângulo ABC, os ângulos  $\widehat{A}$  e  $\widehat{B}$  medem, respectivamente,  $60^\circ$  e  $45^\circ$ ; o lado BC mede  $5\sqrt{6}$  cm. Então, a medida do lado AC é:

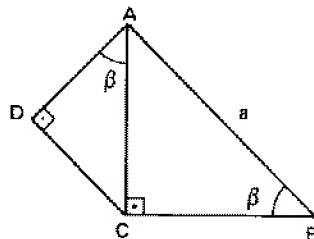
- a) 18 cm
- b)  $5\sqrt{12}$  cm
- c) 12 cm
- d) 9 cm
- e) 10 cm

TC.205 (ITA-73) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B, C. O comandante quando o navio está em A, observa um farol L, e calcula o ângulo  $\widehat{LAC} = 30^\circ$ . Após navegar 4 milhas até B, verifica o ângulo  $\widehat{LBC} = 75^\circ$ . Quantas milhas separa o farol do ponto B?

- a) 4      b)  $2\sqrt{2}$       c)  $\frac{8}{3}$       d)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
e) nenhuma das anteriores

TC.206 (MACK-76) Na figura ao lado,  $\overline{AC} \perp \overline{CB}$  e  $\overline{AD} \perp \overline{DC}$ :  $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ABC}) = \beta$  e  $AB = a$ . O valor de  $\overline{AD}$ , em função de  $a$  e de  $\beta$ , é:

- a)  $\frac{1}{2} a \sin 2\beta$       b)  $2 a \sin 2\beta$   
c)  $\frac{1}{2} a \sin \beta$       d)  $a \sin \frac{\beta}{2}$   
e)  $2 a \sin \beta$



TC.207 (ITA-74) Deseja-se construir uma ferrovia ligando o ponto A ao ponto B que está  $40\sqrt{2}$  Km a sudeste de A. Um lago, na planície onde estão A e B impede a construção em linha reta. Para contornar o lago, a estrada será construída em 2 trechos retos com o vértice no ponto C, que está 36 Km a leste e 27 Km ao sul de A. O comprimento do trecho CB é:

- a)  $\sqrt{182}$  Km      b)  $\sqrt{183}$  Km      c)  $\sqrt{184}$  Km      d)  $\sqrt{185}$  Km  
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.208 (EPUSP-66) Os lados de um triângulo estão na razão 6:8:9. Então:

- a) o triângulo é obtusângulo      b) o triângulo é acutângulo  
c) os ângulos estão na razão 6:8:9  
d) o ângulo oposto ao lado maior é o dobro do ângulo oposto ao lado menor  
e) nenhuma das anteriores

TC.209 (FFCLUSP-67) Dados os segmentos AC e BC e um ângulo  $\widehat{B}$ , é possível construir-se um triângulo que tenha AC e BC como lados e B como ângulo não adjacente a AC e BC quando:

- a)  $AC > BC$       b)  $B < \frac{\pi}{2}$       c)  $AC < BC$       d)  $AC = \frac{1}{2} BC$   
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.210 (ITA-75) Num triângulo escaleno ABC, os lados opostos aos ângulos  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$ ,  $\widehat{C}$  medem respectivamente a, b, c. Então a expressão:

$$a \cdot \sin(\widehat{B} - \widehat{C}) + b \cdot \sin(\widehat{C} - \widehat{A}) + c \cdot \sin(\widehat{A} - \widehat{B})$$

tem valor que satisfaz uma das seguintes alternativas:

- a)  $a \cdot \sin \widehat{A} + b \cdot \sin \widehat{B} + c \cdot \sin \widehat{C}$       b)  $\sin^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}$   
c) 0      d) 1      e) nenhuma das respostas anteriores

TC.211 (GV-75) O lado do octógono regular inscrito num círculo de raio unitário é:

$$\sqrt{2 - \sqrt{2}}. \text{ Pode-se concluir que } \cos \frac{\pi}{8} \text{ vale:}$$

- a)  $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$       b)  $2 + \sqrt{2}$       c)  $2 - \sqrt{2}$       d)  $\sqrt{2} - 1$       e)  $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

TC.212 (MACK-74) A base de um retângulo  $\overline{AD}$  que é três vezes maior que sua altura  $\overline{AB}$ , é subdividida pelos pontos M e N em três partes de igual medida. Nessas condições  $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} + \widehat{ADB}$  é igual a:

- a)  $120^\circ$       b)  $90^\circ$       c)  $85^\circ$       d)  $135^\circ$       e)  $75^\circ$

TC.213 (ITA-75) Seja ABCD um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência.

$$\text{Sabe-se que } \widehat{A} = 2\widehat{C}, \widehat{B} > \widehat{D} \text{ e } \operatorname{tg} \widehat{B} \cdot \operatorname{tg} \widehat{D} + \operatorname{sen} \widehat{A} \cdot \operatorname{sen} \widehat{C} = -\frac{9}{4}.$$

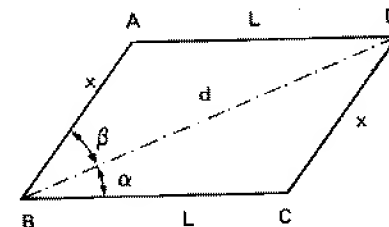
Neste caso, os valores de  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$ ,  $\widehat{C}$ ,  $\widehat{D}$  são, respectivamente,

- a)  $150^\circ, 45^\circ, 75^\circ, 30^\circ$       b)  $90^\circ, 120^\circ, 45^\circ, 60^\circ$   
c)  $120^\circ, 160^\circ, 60^\circ, 30^\circ$       d)  $120^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 60^\circ$   
e) nenhuma das anteriores

TC.214 (ITA-77) Sejam A, B e C três pontos distintos de uma reta, com B entre A e C. Sejam a e b ( $a > 2b$ ) os comprimentos de AB e BC respectivamente. Se o segmento BD é perpendicular ao segmento AC, quanto deve medir BD, para que o ângulo  $\widehat{BDC}$  seja a metade de  $\widehat{BDA}$ ?

- a)  $x = \frac{a}{\sqrt{b(a - 2b)}}$       b)  $x = \frac{ab}{\sqrt{b(a - 2b)}}$       c)  $x = \frac{b}{\sqrt{a(a - 2b)}}$   
d)  $x = \frac{ab}{\sqrt{a(a - 2b)}}$       e) nenhuma das anteriores

TC.215 (ITA-77) Sejam d e L respectivamente os comprimentos da diagonal BD e do lado BC do paralelogramo ABCD ao lado. Conhecendo-se os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  (ver figura), o comprimento x do lado AB é dado por:



- a)  $x = \frac{d \cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta)}$       b)  $x = \frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$       c)  $x = \frac{L \sin \alpha}{\cos(\alpha + \beta)}$   
d)  $x = \frac{L \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$       e) nenhuma das anteriores

# RESPOSTAS

TC.1 a	TC.44 a	TC.87 c	TC.130 c	TC.173 d
TC.2 c	TC.45 d	TC.88 a	TC.131 b	TC.174 c
TC.3 b	TC.46 a	TC.89 b	TC.132 c	TC.175 a
TC.4 a	TC.47 c	TC.90 b	TC.133 c	TC.176 b
TC.5 e	TC.48 c	TC.91 e	TC.134 b	TC.177 c
TC.6 c	TC.49 d	TC.92 e	TC.135 d	TC.178 b
TC.7 b	TC.50 a	TC.93 e	TC.136 d	TC.179 b
TC.8 c	TC.51 c	TC.94 e	TC.137 c	TC.180 c
TC.9 d	TC.52 d	TC.95 d	TC.138 b	TC.181 e
TC.10 c	TC.53 c	TC.96 d	TC.139 c	TC.182 c
TC.11 a	TC.54 e	TC.97 a	TC.140 c	TC.183 a
TC.12 a	TC.55 b	TC.98 d	TC.141 c	TC.184 a
TC.13 a	TC.56 a	TC.99 c	TC.142 b	TC.185 a
TC.14 c	TC.57 e	TC.100 b	TC.143 c	TC.186 c
TC.15 a	TC.58 a	TC.101 a	TC.144 d	TC.187 d
TC.16 d	TC.59 a	TC.102 a	TC.145 b	TC.188 c
TC.17 b	TC.60 c	TC.103 d	TC.146 e	TC.189 c
TC.18 c	TC.61 e	TC.104 d	TC.147 a	TC.190 d
TC.19 b	TC.62 a	TC.105 b	TC.148 a	TC.191 a
TC.20 a	TC.63 a	TC.106 a	TC.149 b	TC.192 d
TC.21 d	TC.64 c	TC.107 e	TC.150 c	TC.193 a
TC.22 d	TC.65 b	TC.108 e	TC.151 d	TC.194 d
TC.23 c	TC.66 d	TC.109 c	TC.152 e	TC.195 a
TC.24 c	TC.67 a	TC.110 a	TC.153 c	TC.196 c
TC.25 e	TC.68 a	TC.111 d	TC.154 b	TC.197 c
TC.26 b	TC.69 a	TC.112 b	TC.155 a	TC.198 a
TC.27 a	TC.70 d	TC.113 d	TC.156 d	TC.199 d
TC.28 b	TC.71 a	TC.114 d	TC.157 a	TC.200 a
TC.29 c	TC.72 c	TC.115 c	TC.158 e	TC.201 d
TC.30 c	TC.73 d	TC.116 e	TC.159 b	TC.202 a
TC.31 e	TC.74 b	TC.117 d	TC.160 b	TC.203 b
TC.32 d	TC.75 e	TC.118 a	TC.161 b	TC.204 e
TC.33 d	TC.76 a	TC.119 b	TC.162 b	TC.205 b
TC.34 e	TC.77 b	TC.120 d	TC.163 a	TC.209 a
TC.35 a	TC.78 e	TC.121 d	TC.164 d	TC.207 d
TC.36 b	TC.79 a	TC.122 a	TC.165 e	TC.209 b
TC.37 a	TC.80 a	TC.123 a	TC.166 d	TC.209 a
TC.38 c	TC.81 e	TC.124 c	TC.167 a	TC.210 c
TC.39 c	TC.82 e	TC.125 b	TC.168 e	TC.211 e
TC.40 e	TC.83 b	TC.126 e	TC.169 d	TC.212 b
TC.41 d	TC.84 e	TC.127 b	TC.170 d	TC.213 d
TC.42 d	TC.85 a	TC.128 a	TC.171 c	TC.214 d
TC.43 e	TC.85 b	TC.129 c	TC.172 b	TC.215 b